HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Esa Lindqvist

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Johdatus kompleksilukuihin

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Toukokuu 2017	74 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työ on oppi- tai lisämateriaali lukion pitkän matematiikan opiskelijoille. Työssä opiskelija tutustutetaan kompleksilukujen perusteisiin lähtien peruslaskutoimituksista, sekä hieman formaaliin matematiikkaan pedagogista otetta kuitenkaan unohtamatta.

Johdanto käsittelee kompleksilukujen historiaa tiivistetysti Paul J. Nahinin kirjan "*An Imaginary Tale*" pohjalta, samalla esitellen myös suomalaisen *Lars Ahlforsin*. Seuraavissa luvuissa 2-9 määritellään kompleksilukuihin liittyviä peruskäsitteitä, kuten *imaginaariyksikkö, laskutoimitukset, liittoluku, itseisarvo, napakoordinaatit* ja *binomiyhtälö*, lukua 4 lukuunottamatta, jossa selitetään hieman sanastoa, kuten *aksiooma, lause* ja *määritelmä*.

Viimeinen luku – *10 Kompleksifunktiot* – johdattelee muutamista reaalilukujen aksioomista lähtien joitain jatkuviin kuvauksiin liittyviä ominaisuuksia, kuten "Weierstrassin-min-max" lauseen laajennos kompleksilukuihin eli, että suljetun joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on suljettu. Viimeisen luvun viimeisenä osiona on todistaa *Algebran peruslause* käyttäen aiemmin opittuja tietoja ja apulauseita.

Jokaiseen lukuun – lukuja 1 ja 4 lukuunottamatta – on liitetty esimerkkejä määritelmien ja lauseiden rinnalle. Näiden kirjo ja vaikeustaso on yksinkertaisista sovellustehtävistä todistuksiin. Esimerkkien rinnalle on usein myös liitetty havainnollistavia kuvia kuvateksteineen.

Näiden lukujen, paitsi viimeisen, lopussa on myös aina "Tehtäviä" -osio, jossa on opiskelijalle suunnattuja tehtäviä yksinkertaisista sovelluksista todistustehtäviin. Bloomin taksonomiassa tehtävät kulkisivat sovelluksesta ("laske") analysoinnin ("pohdi" tai "tutki") kautta syntetisointiin ("todista" tai "osoita"). Hieman "hankalampiin" todistustehtäviin on liitetty vihjeitä tai ohjeita, joiden avulla opiskelijan on helpompi lähteä liikkeelle.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Kompleksiluvut, Algebran peruslause, oppimateriaali, oppikirja

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro Gradu

Johdatus kompleksilukuihin

Esa Lindqvist

013709974

Ohjaaja: Erik Elfving 12.5.2017

Sisältö

Luku 1

Johdanto

"Jumala teki luonnolliset luvut, muu on ihmisen keksintöä"
- *Leopold Kronecker*

1.1 Imaginaarilukujen historiaa

Ylläoleva sitaatti on osa laajempaa keskustelua matemaattisten olioiden luonteesta: onko matematiikka keksittyä vai löydettyä. Kuten lukija varmasti tietää, kompleksiluvut koostuvat – enemmän tai vähemmän paikkansapitävästi – reaaliluvuista ja imaginaariluvuista. Näistä imaginaariluku, eli "mielikuvitusluku", viittaisi ikään kuin keksittyihin lukuihin. Kompleksilukujen historia – suomallaan jälkiviisaudella – taas perustelee löydettyjen kompleksilukujen puolesta, kuten Paul J. Nahin teoksessaan "*An Imaginary Tale*"[5] sen kertoo.

Ennen 1500-lukua matemaatikot suoralta kädeltä hylkäsivät monet nykyään hyväksyttävät ratkaisut matemaattisiin ongelmiin, nimenomaan polynomeihin. Esimerkiksi Diofantos 200-luvulla kuvaili teoksessaan "*Arithmetica*", että yhtälö $4x + 20 = 4$ on "absurdi", koska sillä ei ole positiivista juurta, vaan "mahdoton" juuri $x = -4$. Samoin tietysti suhtauduttiin moniin toisen asteen yhtälöihin, joilla ei ollut reaalisia, tai edes positiivisia, juuria. Tosin kompleksilukuja ei "löydetty" vielä toisen asteen yhtälön avulla, vaan kolmannen.

Melko intuitiivinen tulos on, että kaikilla kolmannen asteen yhtälöillä on vähintään yksi juuri reaalilukujen joukossa: sen kuvaajahan ylittää x-akselin aina vähintään kerran. Tätä juurta ei kuitenkaan osattu ratkaista todella pitkään aikaan. Vasta 1400- ja 1500-lukujen taitteessa alkoivat matemaatikot todella ratkoa kolmannen asteen yhtälöitä. Italialainen *Scipione del Ferro* oli ensimmäinen, joka ratkaisi katkaistun kolmannen asteen yhtälön

$x^3 + px = q$, olettaen $p, q > 0$, reaalisen juuren

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Tästä voidaan helposti johtaa myös ratkaisu tilanteelle, jossa $p < 0$, toisin sanoen yhtälölle $x^3 = px + q$. Nimittäin sijoittamalla p:n tilalle $-p > 0$ saadaan

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Kuten sen ajan matemaatikoilla oli tapana, del Ferro piti ratkaisunsa salaisuutena, mutta tieto del Ferron ratkaisusta kuitenkin levisi. Ennen pitkää kuitenkin *Niccolo Fontana*, joka tunnetaan paremmin nimellä *Tartaglia* (suom. "Änkyttäjä") löysi del Ferron ratkaisun uudelleen. Hän oli aiemmin jo johtanut ratkaisun katkaistulle kolmannen asteen yhtälölle $x^3 + px^2 = q$. Hänkin päätti pitää ratkaisunsa salaisuutena.

Vasta yleiseen tietouteen ratkaisun toi *Girolamo Cardano*, joka sai tietoonsa ratkaisun Tartaglialta, mutta ilman sen johtamista. Cardano itsenäisesti johti ratkaisun uudelleen, ratkaisten samalla kolmannen asteen yhtälön yleisen muodon $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ juuret. Tämän hän teki sijoituksella $x = y - \frac{a_1}{3}$, josta hän sai katkaistun kolmannen asteen yhtälön

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right) y = -\frac{2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_2a_1 - a_3.$$

Tähän hän käytti aiempaa Tartaglialta saamaansa ratkaisua katkaistulle kolmannen asteen yhtälölle. Julkaistuaan tuloksensa teoksessaan "*Ars Magna*", tämä tuli tunnetuksi "Cardanon kaavana".

Cardano oli ensimmäinen imaginaariluvuilla - siis negatiivisen luvun neliöjuurella - operoinut matemaatikko. Teoksessaan "*Ars Magna*" hän esittää ongelman: jaa luku 10 kahteen osaan niin, että niiden tulo on 40. Tämä voidaan muotoilla yhtälöksi

$$\begin{aligned} x\,(10 - x) &= 40 \\ 10x - x^2 &= 40 \\ x^2 - 10x + 40 &= 0, \end{aligned}$$

josta saadaan juuret $5 + \sqrt{-15}$ tai $5 - \sqrt{-15}$. Summaamalla ja kertomalla näitä kuten mitä tahansa lukuja saadaan todellakin oikea ratkaisu. Cardano kuitenkin suhtautui löytämäänsä vielä epäilevästi, varsinkin koska hän törmäsi imaginaarisiin välivaiheisiin kolmannen asteen yhtälöissä, joilla oli pelkästään reaalisia juuria.

Vasta Cardanon seuraaja *Rafael Bombelli* valaisi asiaa teoksessaan "*Algebra*" esittäen ratkaisunsa katkaistulle kolmannen asteen yhtälölle $x^3 = 15x + 4$. Tällä on pelkästään reaalisia juuria, jotka ovat $x = 4$ ja $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Kuitenkin Cardanon kaavaa käyttäen päädytään välivaiheeseen positiiviselle juurelle

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Pitkän työn tuloksena Bombelli kuitenkin osoitti, että tästä tulee $x = 4$.

Merkilliseltä vaikka se näyttääkin, voimme jälkiviisaana todeta, että

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4,$$

minkä voit tämän teoksen tiedoilla todeta oikeaksi.

1.2 Modernit kompleksiluvut

Cardanon aikalaiset kutsuivat ratkaisuja, joissa esiintyi negatiivisen neliöjuuri, termillä "hienostunut" (engl. *sophisticated*). *René Descartes* – 1600-luvun ranskalainen filosofi ja matemaatikko, kenet tunnetaan parhaiten lausumastaan "ajattelen, siis olen" – keksi termin "imaginaariluku"; Descartesin mielestä negatiivisen neliöjuuri oli puhtaasti mielikuvituksen tuotetta.

Myöhemmin sanasta "monimutkainen" siirryttiin käyttämään sen synonyymiä "kompleksinen", ja reaali- ja imaginaarilukuja yhdistävää lukua alettiin kutsua nimellä "kompleksiluku".

1700- ja 1800-luvuilla kompleksilukujen teoriaa edistivät erittäin tunnetut matemaatikot, kuten *Euler*, *Cauchy*, *Riemann* ja *Gauss*. Tässä vaiheessa kompleksiluvut hiljalleen voittivat aikansa matemaatikkojen luottamuksen puolelleen, eikä niitä enää kammoksuttu tai hämmästelty. Tähän aikaan myös norjalainen *Caspar Wessel* kehitti geometrisen tulkinnan kompleksiluvuille: kompleksiluvut voitiin siis tulkita pisteinä tasossa.

1900-luvulla kompleksianalyysi oli vakiintunut osaksi yliopiston matematiikan aloja. Suomalainen *Lars Ahlfors* oli yksi kompleksianalyysin uraauurtavimpia tutkijoita. Hän voitti tutkimuksistaan kaikkien aikojen ensimmäisen Fieldsin mitalin, joka on esillä Helsingin Yliopiston matematiikan laitoksen, Exactumin, aulassa miehen mukaan nimetyn "Lars Ahlfors" -auditorion vieressä. Ahlforsin oppikirja "*Complex Analysis*" tiivistää kompleksianalyysin perusteet ja vähän enemmänkin ja se on edelleen käytössä monissa yliopistoissa.

1.3 Kirjasta

Tämän tutkielman luvut 2 – 9 perustuvat Helsingin Yliopiston "Differentiaali- ja integraalilaskenta osa 2" -kurssin kurssimateriaaliin[3]. Viimeinen luku *10: Kompleksifunktiot* perustuu matematiikkalehdessä "Solmu" esiintyneeseen artikkeliin "Algebran peruslause lukiolaisille"[2].

Kirjan tavoitteet ovat kahdenlaiset:

1. Tutustuttaa lukija kompleksilukujen perusteisiin ja Algebran peruslauseeseen, ja

2. Tutustuttaa lukija formaaliin yliopistotasoiseen matematiikkaan.

Jälkimmäinen tarkoittaa sitä, että kaikki kirjassa esiintyvät käsitteet *määritellään* ja/tai *todistetaan* tarkasti. Poikkeuksena tähän on *Eulerin lause*, jota ei tässä kirjassa todisteta.

Kirja on kohdennettu ensisijaisesti lukion pitkän matematiikan opiskelijoille lisämateriaaliksi, mutta itsenäisenä kokonaisuutena kirja ei vaadi huomattavia esitietoja. Kirjassa käsitellään kompleksilukuja ja niiden laskutoimituksia (luvut 2 – 9) perusteista lähtien, nojaten ainoastaan reaalilukujen peruslaskutoimituksiin; tätä kirjaa voi siis lähestyä peruskoulun matematiikan pohjalta, jos mielenkiintoa riittää.

Kirjan tehtävät ovat suunniteltu haastaviksi formaalin matematiikan ensikertalaiselle: tehtävätyypit painottuvat todistuksiin ja pohdintoihin, mutta peruslaskutehtäviäkin löytyy. Tehtäviä ei ole järjestetty mihinkään tiettyyn järjestykseen, vaan tehtävätyyppejä voi esiintyä sattumanvaraisessa järjestyksessä. Kirjan lukuihin on liitetty aina esimerkkitehtäviä, joista lukija voi katsoa mallia tehtävienteossa, esimerkiksi todistusstrategiaa valitessaan.

Kirjan viimeinen luku *Kompleksifunktiot* käsittää hieman reaalilukujen aksioomeja sekä muutaman formaalin määritelmän (muun muassa *kuvaus, kuvajoukko* ja *jatkuvuus*), jotka antavat lisäpohjustusta luvun "ytimelle", *Algebran peruslauseelle.* Vaikka sen todistus onkin perusteellinen, voi se vaatia useamman lukukerran; sitä – tai edes koko lukua – ei olekaan tarkotus ahmaista kerralla, vaan pureskella hitaasti ja nauttien.

Luku 2

Imaginaariyksikkö

2.1 Negatiivisen neliöjuuri

Perinteinen alustus imaginaariyksikköön on pohtia, millaisia ratkaisuja voisi olla yhtälöllä

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ yhtälöllä ei ole ratkaisuja, mutta laajentamalla lukualueemme kompleksilukuihin, ratkaisut löytyvätkin. Kompleksiluvut tarkoittavat, että sen sijaan, että pohtisimme liikaa, mitä $\sqrt{-1}$ tarkoittaa, määrittelemme sen seuraavasti:

Määritelmä 2.1. Olkoon olemassa sellainen yksikkö $i \in \mathbb{C}$, jolle pätee

$$i^2 = -1.$$

Kutsumme tätä kompleksilukua i *imaginaariyksiköksi.*

Huomautus 2.2. Merkintä $\mathbb{C}$ tarkoittaa kompleksilukujen joukkoa.

2.1.1 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Ratkaise funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x) = x^2 + 1$$

juuret.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x^2 &= i^2 \\ x &= \pm i. \end{aligned}$$

Huomautus 2.3. Merkintä $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tarkoittaa, että ratkaisemme yhtälöä kompleksilukujen joukossa. Merkinnässä ensimmäinen termi tarkoittaa "lähtöjoukkoa" tai "määrittelyjoukkoa", ja jälkimmäinen termi "maalijoukkoa" tai "arvojoukkoa". Ääneen se luetaan "funktio f kompleksiluvuilta kompleksiluvuille".

Esimerkki 2. Ratkaise funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2 + 4$ juuret.

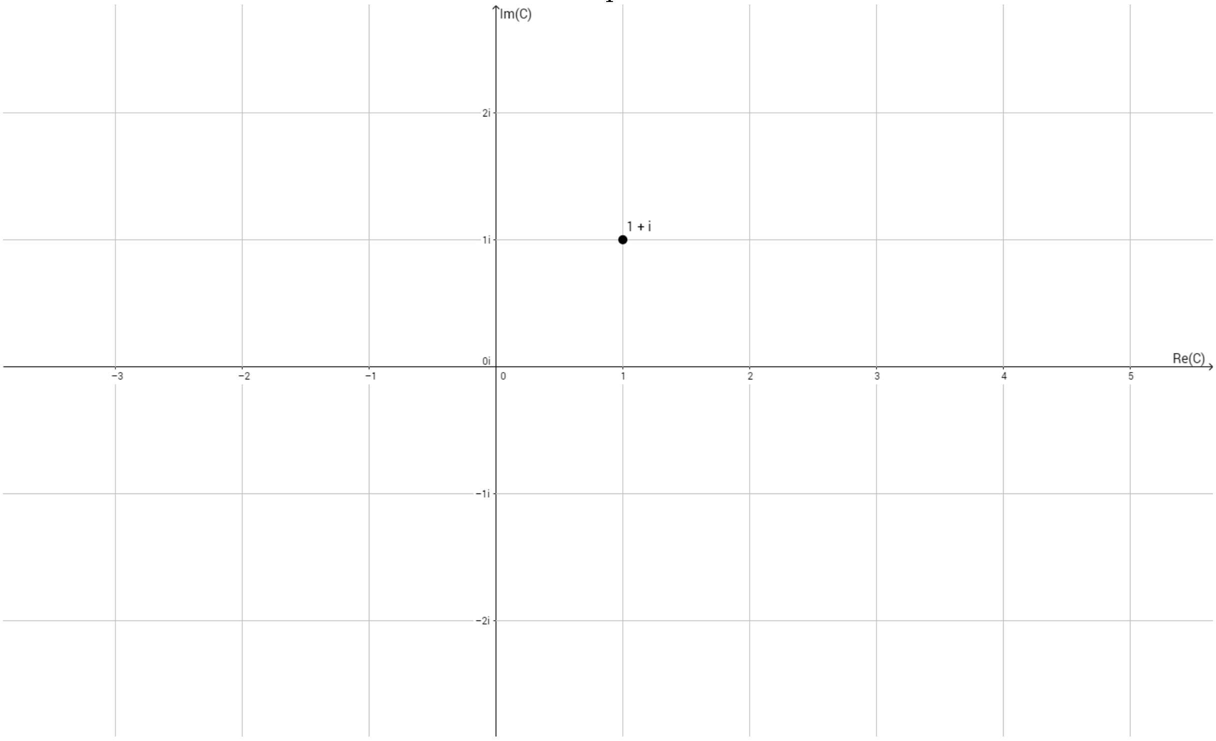
Ratkaisu.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x) &= x^2 + 4 \\ f(x) &= 0 \\ x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 &= -4 \\ x^2 &= 4 \cdot (-1) \\ x^2 &= 4i^2 \\ x &= \pm 2i \end{aligned}$$

Huomautus 2.4. Kuten aiemmista esimerkeistä voi päätellä, imaginaariyksikköä i voidaan ajatella eräänlaisena kantavektorina, jota voi kertoa skalaarilla, ja tietyllä tapaa se myös on sitä.

2.2 Kompleksiluvun merkintä ja osaset

Kuva 2.1: Kompleksiluku $1 + i$



Kompleksilukujen ei tarvitse kuitenkaan olla täysin imaginaarisia, vaan ne voivat olla myös täysin reaalisia tai sekoitus reaali- ja imaginaarilukuja.

Esimerkki 3. Kompleksiluku $z = 3+2i$ ei ole reaalinen eikä imaginaarinen, vaan kompleksinen, eli sekoitus reaali- ja imaginaarilukuja.

Yleisesti kompleksilukuja $z \in \mathbb{C}$ (luetaan "z kuuluu kompleksilukuihin") merkitään

$$z = x + yi,$$

missä x on reaaliosa ja y on imaginaariosa.

Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$ reaaliosaa merkitään

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= x \text{ ja imaginaariosaa} \\ \mathrm{Im}(z) &= y. \end{aligned}$$

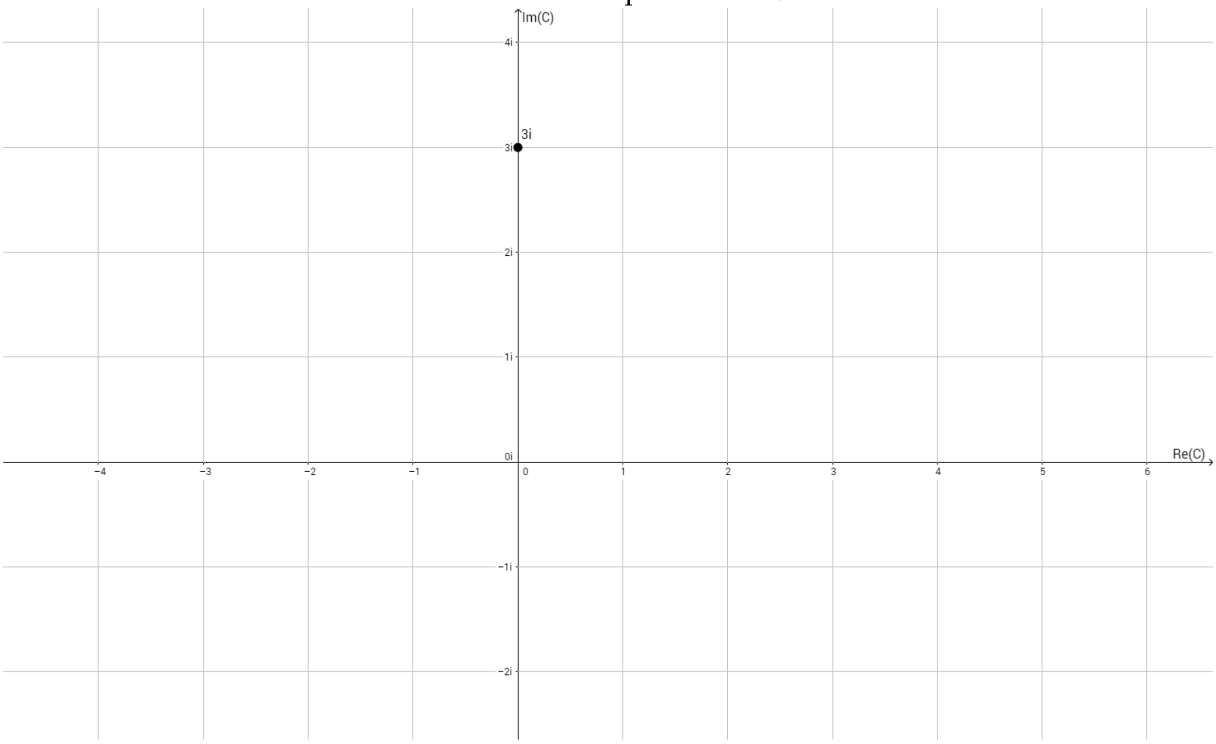
2.2.1 Esimerkkejä

Esimerkki 4. Kirjoita auki kompleksiluvun $z = 3i$ reaali- ja imaginaariosat.

Ratkaisu. *Kompleksiluvun* $z = 3i$ *osat ovat*

$$\mathrm{Re}(z) = 0 \text{ ja}$$
$$\mathrm{Im}(z) = 3.$$

Kuva 2.2: Kompleksiluku $3i$



2.3 Tehtäviä

Tehtävä 1. Kirjoita auki kompleksiluvun $z_1 = 5 + 16i$ reaali- ja imaginaariosat.

Tehtävä 2. Kirjoita auki kompleksiluvun $z_2 = 2 + 3i + i + 1$ reaali- ja imaginaariosat.

Tehtävä 3. Ratkaise funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2 + 2$ juuret.

Tehtävä 4. Ratkaise funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$ juuret.

Tehtävä 5. Sievennä luvut i^0, i^3, i^4, i^5, i^6, ... Huomaatko kaavan?

Luku 3

Laskutoimitukset

Kompleksilukujen summa ja erotus toimivat kuten voisi intuitiivisesti kuvitella: reaaliosat yhteen ja imaginaariosat yhteen. Kompleksilukujen tuloa ja osamäärää ei voida näin helposti määritellä.

3.1 Summa ja erotus

Määritelmä 3.1. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ kompleksilukuja, siis muotoa $z_n = x_n + y_n i$. Tällöin niiden summa on

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i \\ &= x_1 + x_2 + y_1 i + y_2 i \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i \end{aligned}$$

ja erotus

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= x_1 + y_1 i - (x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 - x_2 + y_1 i - y_2 i \\ &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i. \end{aligned}$$

Huomautus 3.2. Määrittelimme kompleksilukujen summan ja erotuksen käyttämällä reaalilukujen vastaavia ja tunnettuja laskutoimituksia. Täytyy muistaa että määritelmät ovat vain sopimuksia. Jos määrittelisimme laskutoimitukset millään muulla tavalla, päätyisimme määrittelemään joitain muita lukujoukkoja.

Tällä määritelmällä on kuitenkin hyödyllisiä implikaatioita: reaaliset kompleksiluvut (eli luvut, joilla imaginaariosa on 0) käyttäytyvät summan ja erotuksen suhteen identtisesti vastaavien reaalilukujensa kanssa.

3.1.1 Esimerkkejä

Esimerkki 5. Laske kompleksilukujen $1+i$ ja $19-2i$
a) summa
b) erotus

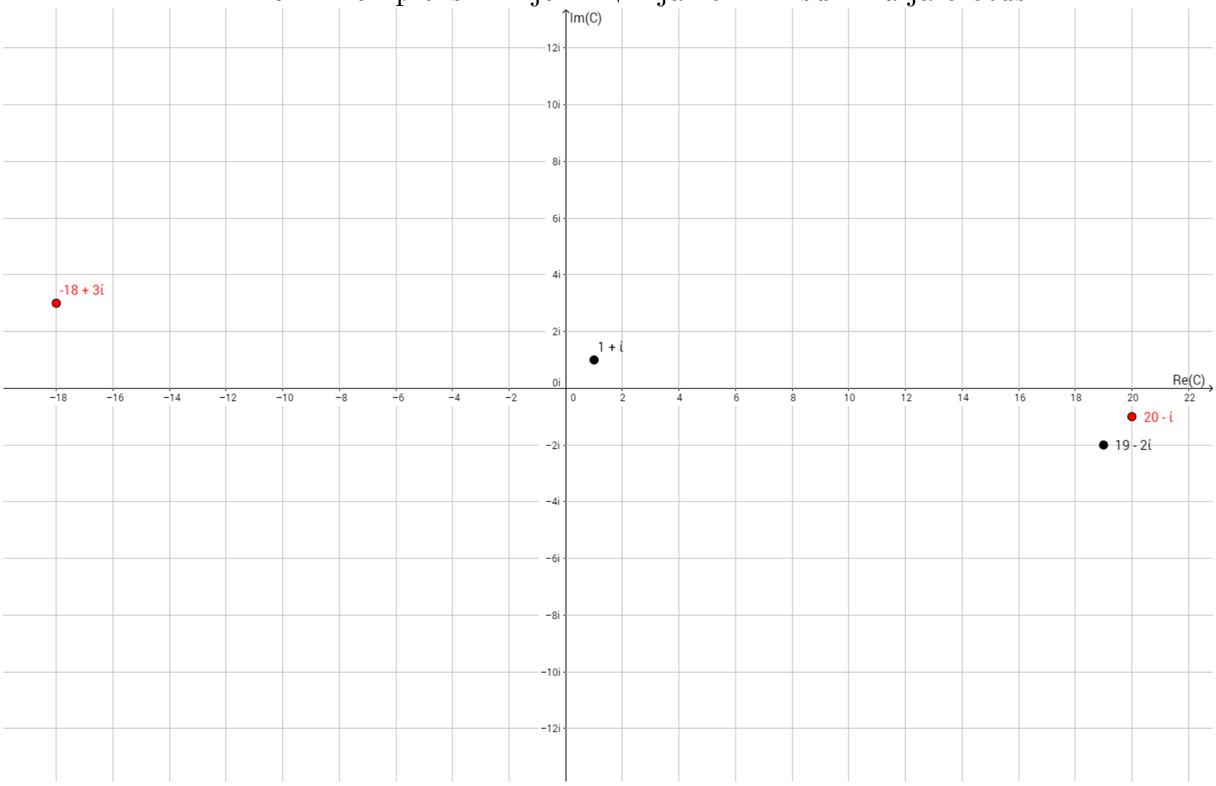
Ratkaisu. *a)*

$$\begin{aligned} 1+i+19-2i &= (1+19)+(1-2)i \\ &= 20-i \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 1+i-(19-2i) &= (1-19)+(1-(-2))i \\ &= -18+3i \end{aligned}$$

Kuva 3.1: Kompleksilukujen $1+i$ ja $19-2i$ summa ja erotus



Esimerkki 6 (Yhteenlaskun liitännäisyys)**.** Osoita, että kompleksiluvuilla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ pätee

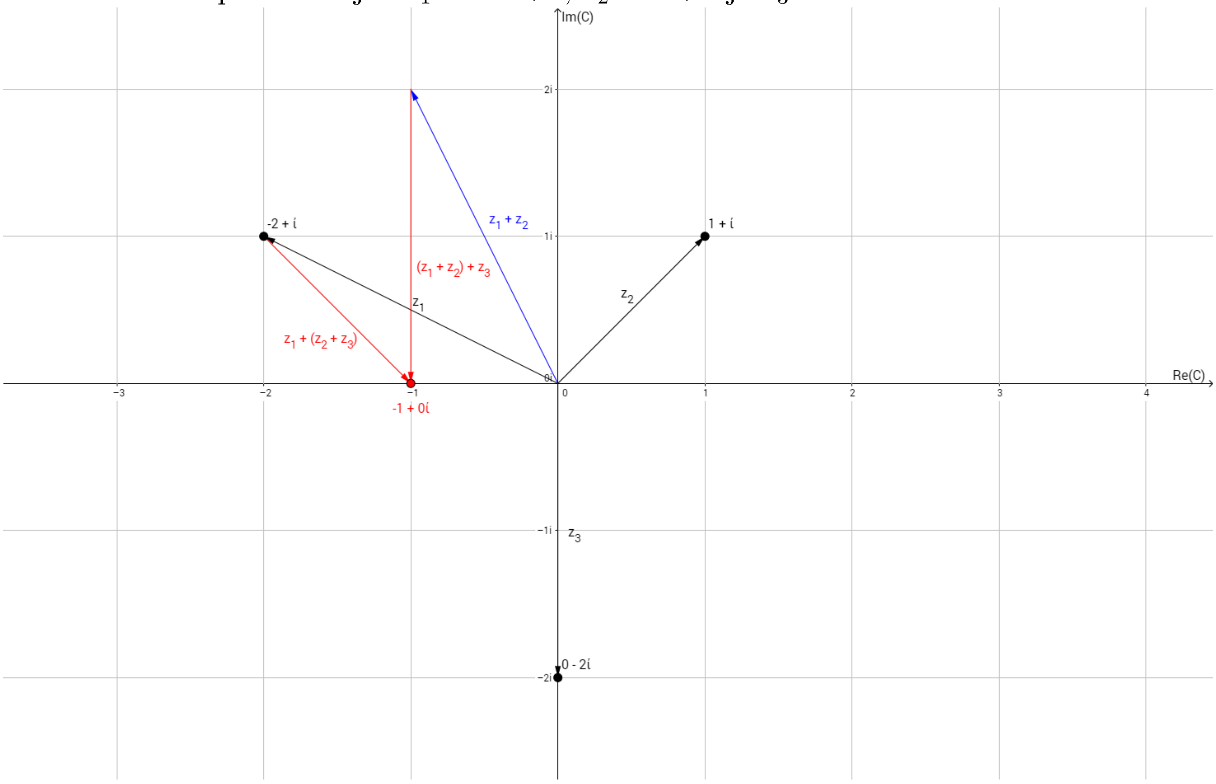
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

Todistus. *Oletetaan, että* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= x_1 + y_1 i + ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3)) + (y_1 + (y_2 + y_3))i \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3) + ((y_1 + y_2) + y_3)i \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + x_3 + y_3 i \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

□

Kuva 3.2: Kompleksilukujen $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 1 + i$ ja $z_3 = -2i$ summa on liitännäinen



Huomautus 3.3. Yllä oleva neliö luetaan "M.O.T" (lat. "Q.E.D", "quod erat demonstrandum"), joka on lyhenne sanoista "mikä oli todistettava". On yleinen tapa matematiikassa päättää todistus tähän merkintään.

Huomautus 3.4. Koska luvut $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, voimme käyttää niillä tunnettuja ominaisuuksia. Edellinen todistus nojaa olennaisesti nimenomaan reaalilukujen yhteenlaskun liitännäisyyteen (ts. $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$).

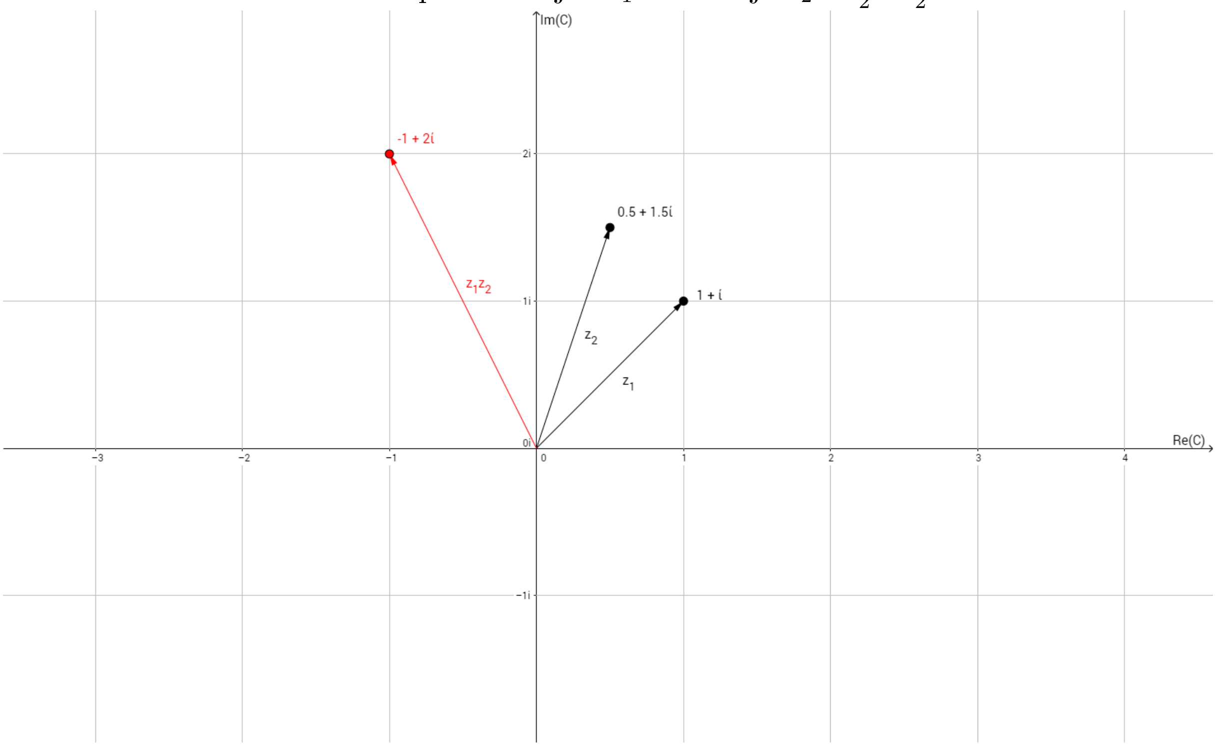
3.2 Tulo

Määritelmä 3.5. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ kompleksilukuja. Tällöin niiden tulo on

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 i y_2 i \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i, \qquad \text{missä } i^2 = -1 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \end{aligned}$$

Huomautus 3.6. Käytimme taas määritelmässä hyväksi reaalilukujen tulon osittelulakia sekä luvussa 2 määrittelemäämme tietoa imaginaariyksikön neliöstä.

Kuva 3.3: Kompleksilukujen $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ tulo



3.2.1 Kompleksiluvun kertominen skalaarilla

Edellisen määritelmän avulla voimme formuloida kompleksiluvun ja reaaliluvun tulon.

Lause 3.7. *Olkoot $x_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ ja $z \in \mathbb{C}$. Tällöin $x_{\mathbb{R}} z = x_{\mathbb{R}} x + x_{\mathbb{R}} yi$.*

Todistus. *Kompleksilukujen tulon määritelmän mukaan*

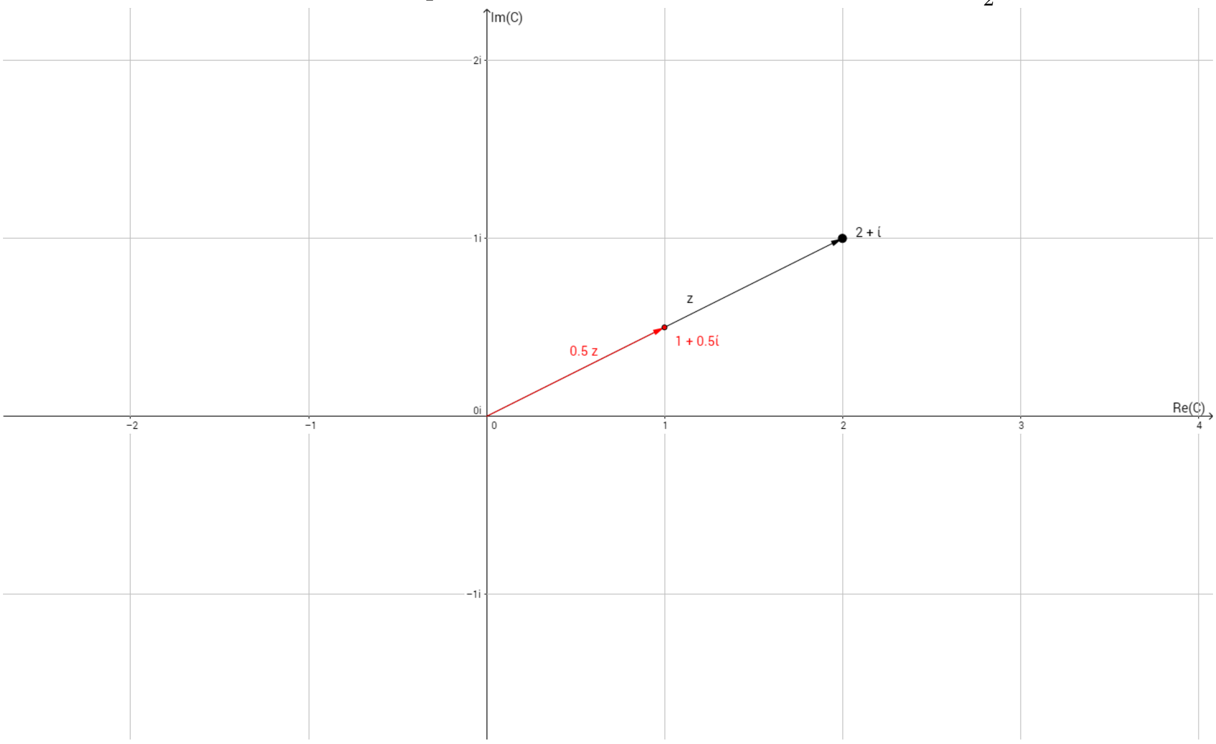
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Olkoon $z_1 = x_{\mathbb{R}} + 0i = x_{\mathbb{R}}$ ja $z_2 = x + yi = z$. Tällöin

$$\begin{aligned} x_{\mathbb{R}} z &= (x_{\mathbb{R}} x - 0y) + (x_{\mathbb{R}} y + x0)i \\ &= x_{\mathbb{R}} x + x_{\mathbb{R}} yi \end{aligned}$$

□

Kuva 3.4: Kompleksilukua $z = 2 + i$ *skaalataan* luvulla $\frac{1}{2}$



Huomautus 3.8. Äskeisessä lauseessa siis osoitimme, että reaaliluvun ja kompleksiluvun tulo käyttäytyy kuin vektorin ja skalaarin tulo. Todistamiseen käytimme aiempaa määritelmää apuna, jotta emme nojaisi pelkkään intuitioon.

3.2.2 Esimerkkejä

Esimerkki 7. Olkoot $z_1 = 42 - 4i, z_2 = -10 + 2i \in \mathbb{C}$ ja $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. Laske

$$xz_1z_2.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
xz_1z_2 &= \frac{1}{2} \cdot (42 - 4i) \cdot (-10 + 2i) \\
&= \frac{1}{2} \cdot ((42 \cdot (-10) - ((-4) \cdot 2)) + (42 \cdot 2 + (-10) \cdot (-4))i) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-412 + 124i) \\
&= \frac{-412}{2} + \frac{124}{2}i \\
&= -206 + 62i.
\end{aligned}$$

Esimerkki 8 (Kertolaskun vaihdannaisuus)**.** Osoita, että kompleksilukujen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tulo z_1z_2 on vaihdannainen, eli että

$$z_1z_2 = z_2z_1.$$

Todistus. *Oletetaan, että* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Tällöin*

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \\
&= (x_2x_1 - y_2y_1) + (x_2y_1 + x_1y_2)i \\
&= z_2z_1.
\end{aligned}$$

□

3.3 Käänteisluku

Jokaista kompleksilukua $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kohti on olemassa käänteisluku $z^{-1} = \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ siten, että $z \cdot z^{-1} = 1$.

Huomautus 3.9. Merkinnöistä:

1. Kompleksiluku $0 \in \mathbb{C}$ tarkoittaa siis lukua, jolla molemmat komponentit ovat 0. Toisinsanoen $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ ja $\mathrm{Im}(z) = 0$. Joskus käytämme tästä myös merkintää 0, joka tarkoittaa samaa asiaa. Tässä kirjassa käytetään molempia merkintöjä tarpeen mukaan.

2. Merkintä $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tarkoittaa kompleksilukujen joukkoa, josta on poistettu origo (eli luku 0).

Lause 3.10. *Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (toisin sanoen $z \neq 0$). Tällöin*

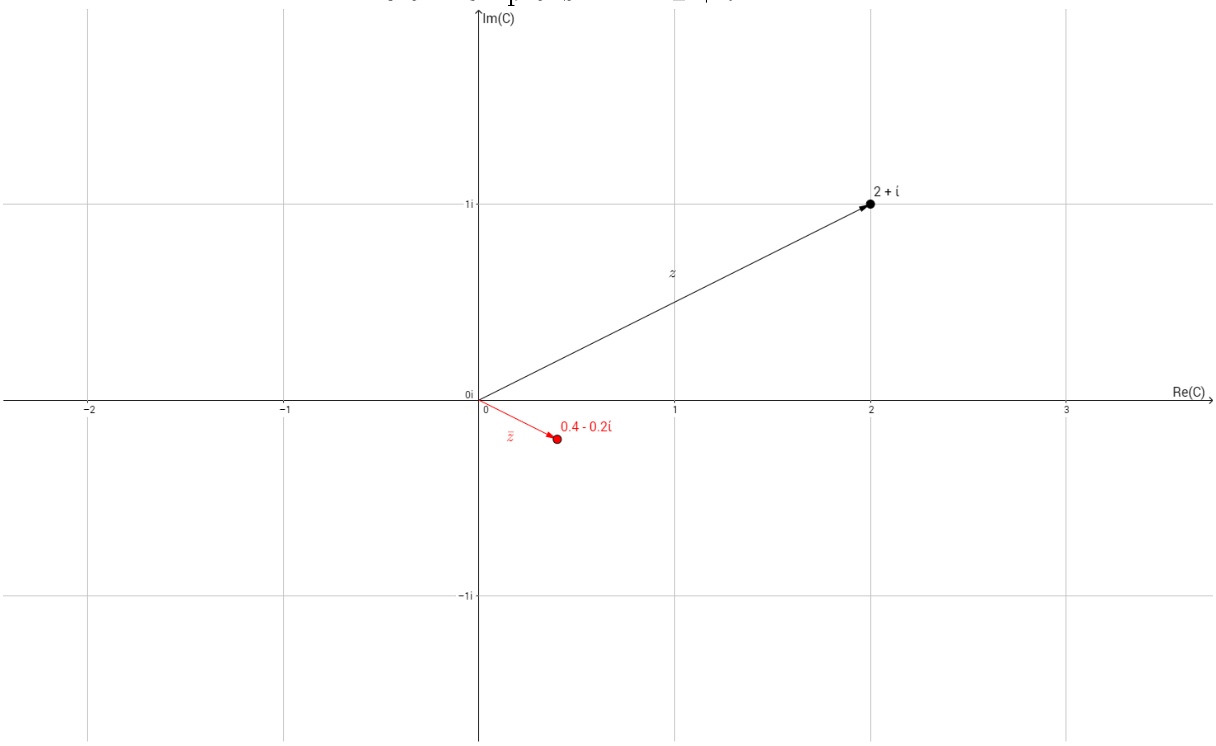
$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$$

Todistus. *Olkoon $z = x + yi \neq 0 \in \mathbb{C}$. Tällöin $x^2 + y^2 > 0$ ja*

$$\begin{aligned}
z \cdot z^{-1} &= (x+yi) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i \right) \\
&= \left(x \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) - y \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) \right) + \left(x \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) + y \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) \right) i \\
&= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \right) + \left(\frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{xy}{x^2+y^2} \right) i \\
&= 1 + 0i \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Kuva 3.5: Kompleksiluvun $2+i$ käänteisluku



Kaavan olisimme voineet myös johtaa seuraavasti:

Todistus. *Olkoon $z = a + bi \neq 0 \in \mathbb{C}$. (Huom! Tästä seuraa, että a tai b tai molemmat ovat erisuuria kuin 0).*

Oletetaan, että on olemassa kompleksiluku $x + yi$, jolla $(a + bi) \cdot (x + yi) = 1$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$(ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i.$$

Tästä voimme muotoilla yhtälöparin $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$,

josta jälkimmäisestä yhtälöstä ratkaisemalla muuttujan y suhteen saamme

$$y = \frac{-bx}{a},\ a \neq 0.$$

Huomautus 3.11. Oletamme nyt, että $a \neq 0$. Jos $a = 0$, niin silloin $b \neq 0$, jolloin valitsisimme muuttujan x ratkaistavaksi ja ratkaisu kulkisi lähes identtisesti

Sijoitamme tämän ensimmäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} ax - b\left(\frac{-bx}{a}\right) &= 1 \\ ax + \frac{b^2x}{a} &= 1 \\ \left(a + \frac{b^2}{a}\right)x &= 1 \\ \left(\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{a}\right)x &= 1 \\ \left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)x &= 1 \\ x &= \frac{a}{a^2 + b^2}\ . \end{aligned}$$

Nyt muuttuja x on ratkaistu, jolloin voimme sijoittaa tämän aiempaan yhtälöömme muuttujalle y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-bx}{a} \\ y &= \frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y &= \frac{-b}{a^2 + b^2}\ . \end{aligned}$$

Olemme vihdoin maalissa, ja siis etsitty käänteisluku on

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

□

Huomautus 3.12. Osamäärän määrittelemme vasta kappaleessa 5, sillä tarvitsemme sitä varten vielä tietoa liittoluvuista.

3.4 Tehtäviä

Tehtävä 6. Olkoot $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + (3+3i)$ ja $g(z) = 10i - z$ funktioita. Ratkaise funktion $f + g$ nollakohdat.

Tehtävä 7. Osoita, että kompleksiluvuilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$z + z = 2z.$$

Tehtävä 8 (Yhteenlaskun vaihdannaisuus)**.** Osoita, että kompleksilukujen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ yhteenlasku on vaihdannainen, eli

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Tehtävä 9 (Yhteenlaskun neutraalialkio)**.** Osoita, että kompleksiluvulla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$z + 0 = z.$$

Tehtävä 10 (Yhteenlaskun vasta-alkio)**.** Osoita, että jokaisella $z \in \mathbb{C}$ on olemassa vastaluku $-z \in \mathbb{C}$, jolla

$$z + (-z) = 0.$$

Tehtävä 11. Johda kompleksilukujen kertolaskun määritelmästä kaava kompleksilukujen toiselle potenssille. (Toisin sanoen selvitä mitä on

$$z^2 = z \cdot z,$$

kun $z \in \mathbb{C}$.)

Tehtävä 12 (Kertolaskun liitännäisyys)**.** Osoita, että kaikilla $z_j = x_j + y_j i \in \mathbb{C}$ pätee

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$$

Tehtävä 13 (Osittelulaki)**.** Osoita, että kaikilla $z_j = x_j + y_j i \in \mathbb{C}$ pätee

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Tehtävä 14 (Ykkösalkio)**.** Osoita, että kompleksiluvulla $z \in C$ ja reaalilukujen ykkösalkiolla $1 \in \mathbb{R}$ pätee

$$1 \cdot z = z.$$

Tehtävä 15. Olkoot $z_1 = 3 + 3i$ ja $z_2 = 2 - i$. Laske

$$\frac{z_1}{z_2}\ .$$

Huomautus 3.13. Laske siis lukujen z_1 ja z_2^{-1} tulo.

Luku 4

Matematiikan sanastoa

4.1 Aksiooma (tai aksiomi) ja määritelmä

Aksiooma tarkoittaa perusolettamusta. Toisin sanoen aksioomat oletetaan todeksi ja niihin nojaten todistetaan muita tuloksia. Esimerkiksi reaalilukujen perusoletuksiin kuuluu järjestysrelaatio:

Aksiooma 4.1. Kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ pätee yksi (ja vain yksi) seuraavista:

$$\begin{aligned} \text{i)}\ & a < b \\ \text{ii)}\ & a = b \\ \text{iii)}\ & a > b \end{aligned}$$

Huomautus 4.2. Kompleksilukujen joukossa tämä aksiooma on pudotettava, sillä tason pisteillä ei ole reaalilukujen kaltaista järjestysrelaatiota. Tason pisteille voi määritellä järjestysrelaation, mutta se ei käyttäydy samalla tavalla kuin reaaliluvut suhteessa laskutoimituksiin.

4.1.1 Määritelmä

Määritelmä on formaali kuvaus jostakin asiasta tai käsitteestä. Määritelmän tulisi olla ristiriidaton olemassaolevien aksiomien kanssa. Jos määritelmä on ristiriidassa aksiomien kanssa, on joko määritelmä hylättävä tai vaihdettava aksiomia.

Esimerkiksi reaalifunktioilla jatkuvuus määritellään seuraavasti:

Määritelmä 4.3. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *jatkuva pisteessä* $a \in \mathbb{R}$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, aina kun $|x - a| < \delta$. Jos funktio on jatkuva kaikissa pisteissä $a \in \mathbb{R}$, sanomme, että funktio on *jatkuva*.

Huomautus 4.4. Tämä määritelmä käydään hyvin huolellisesti läpi matematiikan perusopinnoissa yliopistolla, joten emme tässä kohtaa käy sitä läpi.

4.2 Lause, lemma, propositio, korollaari ja konjektuuri

4.2.1 Lause

Lause on jokin väite, joka on aiemman tiedon nojalla todistettu. Esimerkkinä luonnollisten lukujen lause, jonka mukaan kahden parillisen luvun tulo on aina parillinen:

Lause 4.5. *Kahden parillisen luvun tulo on aina parillinen.*

Lauseen yhteyteen kuuluu aina todistus, ellei sen todistus ole niin triviaali ("vähäpätöinen", "alkeellinen", "itsestäänselvä"), että sen voi jättää lukijan selvitettäväksi.

Todistus. *Olkoon $n, m \in \mathbb{N}$ parillisia lukuja. Koska parilliset luvut ovat jaollisia kahdella, voidaan merkitä $n = 2k$ ja $m = 2l$, joillain luvuilla $k, l \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$nm = 2k \cdot 2l = 4kl.$$

Nyt $2 \mid 4kl$ (kts. lemma 4.8), eli $4kl = nm$ on parillinen. □

Huomautus 4.6. Merkintä $a \mid b$ luetaan "a jakaa b:n". Se siis tarkoittaa, että luku b on jaollinen a:lla.

4.2.2 Korollaari

Korollaari on suomeksi "looginen seuraus". Korollaari on siis lause, jonka todistus suhteessa sitä edeltävään lauseeseen on poikkeuksellisen lyhyt tai itsestäänselvä, ettei sitä tarvitse erikseen kirjoittaa auki.

Korollaari 4.7. *Kolmen parillisen luvun tulo on aina parillinen.*

4.2.3 Lemma

Lemma on suomeksi "apulause". Lauseen osana, lemmaa käytetään todistamaan merkittävämpi tulos. Lauseen 4.5 apulauseena käytettiin seuraavanlaista lemmaa

Lemma 4.8. *Jos luku on jaollinen neljällä, on se myös jaollinen kahdella.*

Todistus. *Jätetään lukijalle.* □

4.2.4 Konjektuuri

Konjektuuri on väittämä, jolle ei ole vielä todistusta, mutta joka otaksutaan todeksi (kunnes toisin todistetaan). Konjektuurista tulee lause tai teoreema, vasta kun se osoitetaan todeksi.

Kuuluisia konjektuureja ovat **Riemannin hypoteesi** ja **Collatzin konjektuuri**. Edellisen todistuksesta on Clay-instituutti (engl. “Clay Mathematics Institute”) luvannut miljoonan dollarin palkinnon. Clay-instituutin ns. “Millenium-ongelmista” on tähän mennessä (2016) todistettu vain yksi, **Poincarén konjektuuri**.

Luku 5

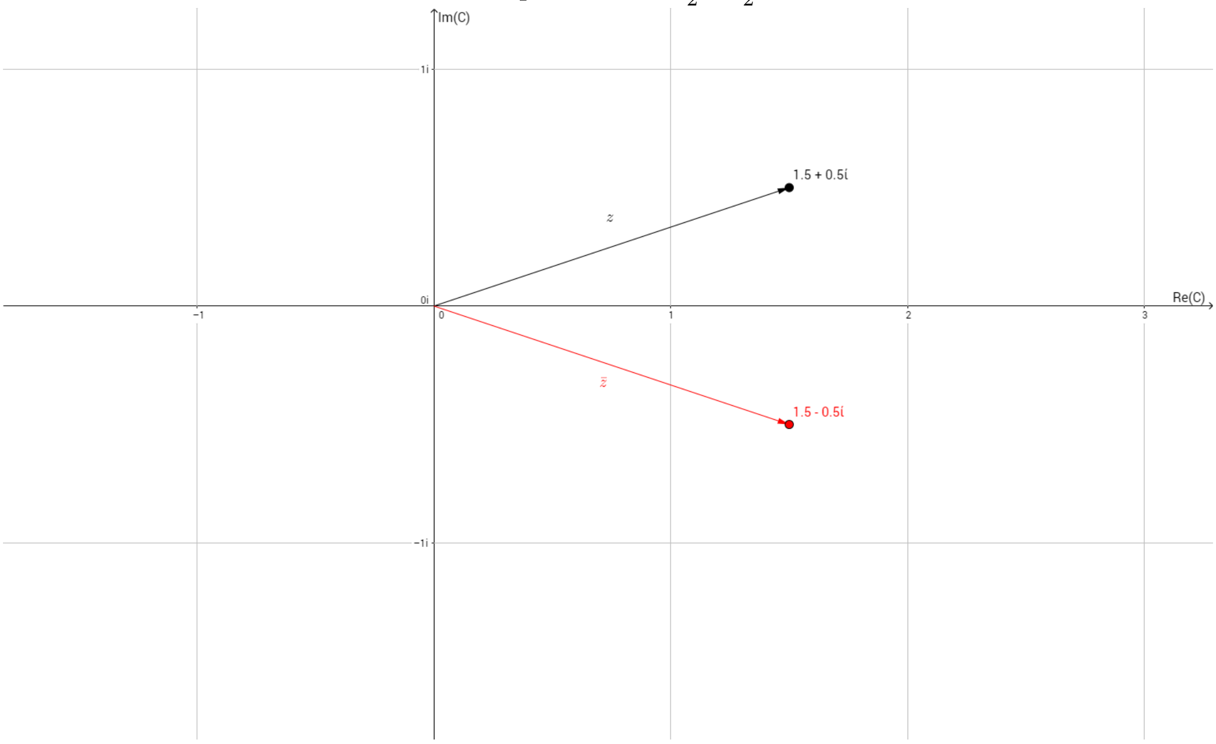
Liittoluku ja osamäärä

5.1 Liittoluku

Kompleksiluvuilla on reaalilukujen tapaan käänteisluku ($\frac{1}{z}$) ja vastaluku ($-z$), mutta reaaliluvuista poiketen kompleksiluvuille on määritelty myös liittoluku.

Määritelmä 5.1. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ kompleksiluku muotoa $z = x + yi$. Tällöin sen liittoluku on $\bar{z} = x - yi$.

Kuva 5.1: Kompleksiluvun $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ liittoluku



5.1.1 Esimerkkejä

Liittoluvulla on muutamia hyödyllisiä ominaisuuksia, ensimmäinen niistä on kompleksiluvun ja sen liittoluvun summa:

Esimerkki 9. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= x + yi + x - yi \\ &= 2x \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= x + yi - (x - yi) \\ &= 2yi. \end{aligned}$$

Korollaari 5.2.

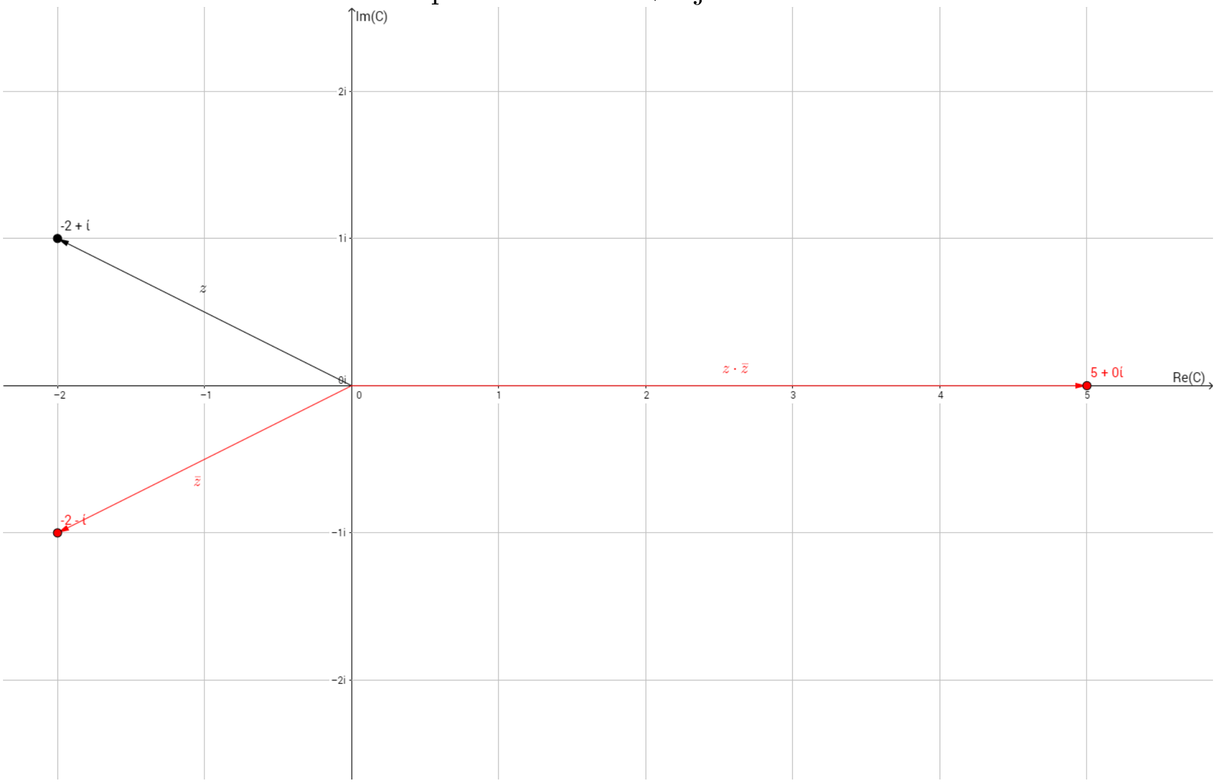
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \; ja \; \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2} \; .$$

Esimerkki 10. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x+yi)(x-yi) \\ &= x^2 - (-y)y + (x(-y) + xy)i \\ &= x^2 + y^2 + (xy - xy)i \\ &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

joka on täysin reaalinen.

Kuva 5.2: Kompleksiluvun $-2+i$ ja sen liittoluvun tulo



Esimerkki 11. Osoita, että liittoluvun liittoluku on luku itse, eli

$$\overline{(\bar{z})} = z \text{ kaikilla } z \in \mathbb{C}.$$

Ratkaisu. *Olkoon $z \in \mathbb{C}$ muotoa $z = x + yi$. Tällöin sen liittoluku on $\bar{z} = x - yi$, jonka liittoluku $\overline{(\bar{z})} = x - (-y)i = x + yi = z$.*

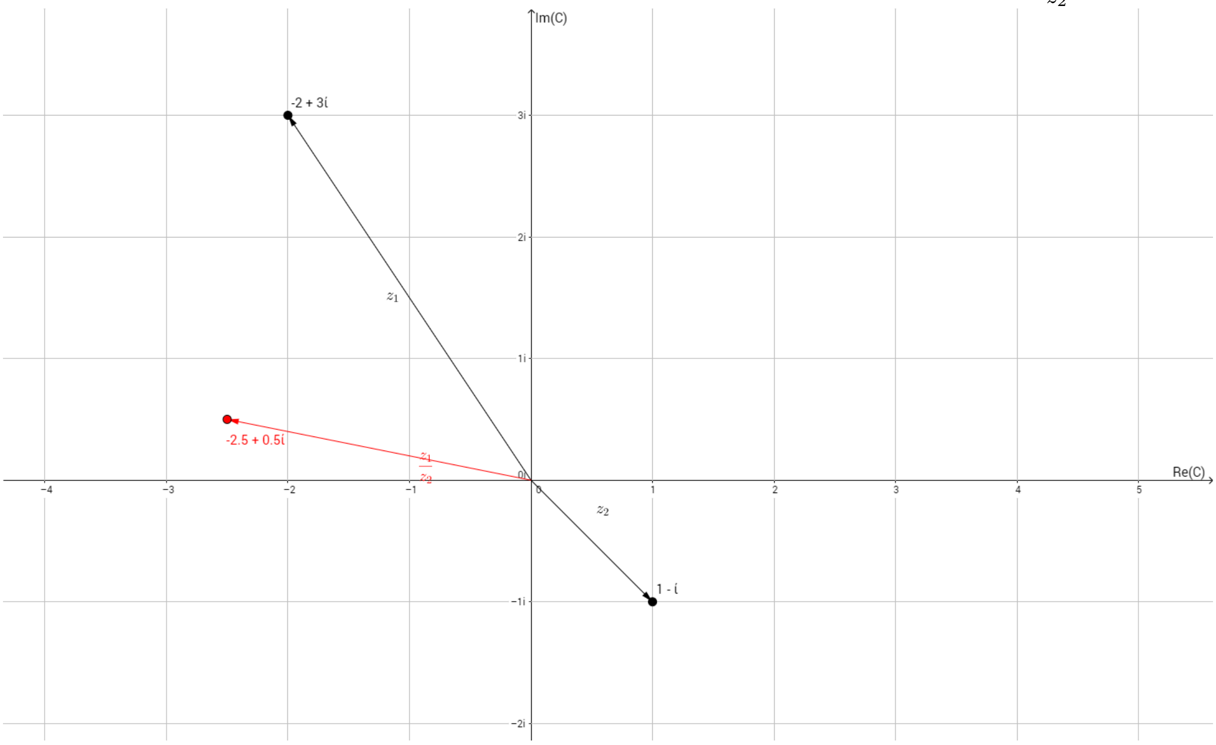
5.2 Osamäärä

Osamäärän olisimme voineet määritellä suoraan tulon ja käänteisluvun avulla, mutta liittoluvun avulla tämä onnistuu näppärämmin.

Määritelmä 5.3. Olkoon $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, missä $z_1 = x + yi$ ja $z_2 = a + bi \neq 0$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} && \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = 1, \text{ kts. luku 3.3} \\
&= \frac{(x+yi)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} \\
&= \frac{ax + by + (ay - bx)i}{a^2 + b^2} && \text{kts. esimerkki 10.}
\end{aligned}
$$

Kuva 5.3: Kompleksilukujen $z_1 = -2 + 3i$ ja $z_2 = 1 - i$ osamäärä $\frac{z_1}{z_2}$



Lause 5.4. *Olkoot $z_1 \in \mathbb{C}$ ja $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

Todistus. *Olkoot* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, *missä* $z_1 = x + yi$ *ja* $z_2 = a + bi \neq 0$. *Tällöin*

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{ax + by + (ay - bx)i}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{(x + yi)(a - bi)}{a^2 + b^2} \\
&= (x + yi) \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} && \textit{huom. } \frac{1}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R} \\
&= (x + yi) \cdot (a + bi)^{-1} \\
&= z_1 \cdot z_2^{-1}.
\end{aligned}$$

□

5.2.1 Esimerkkejä

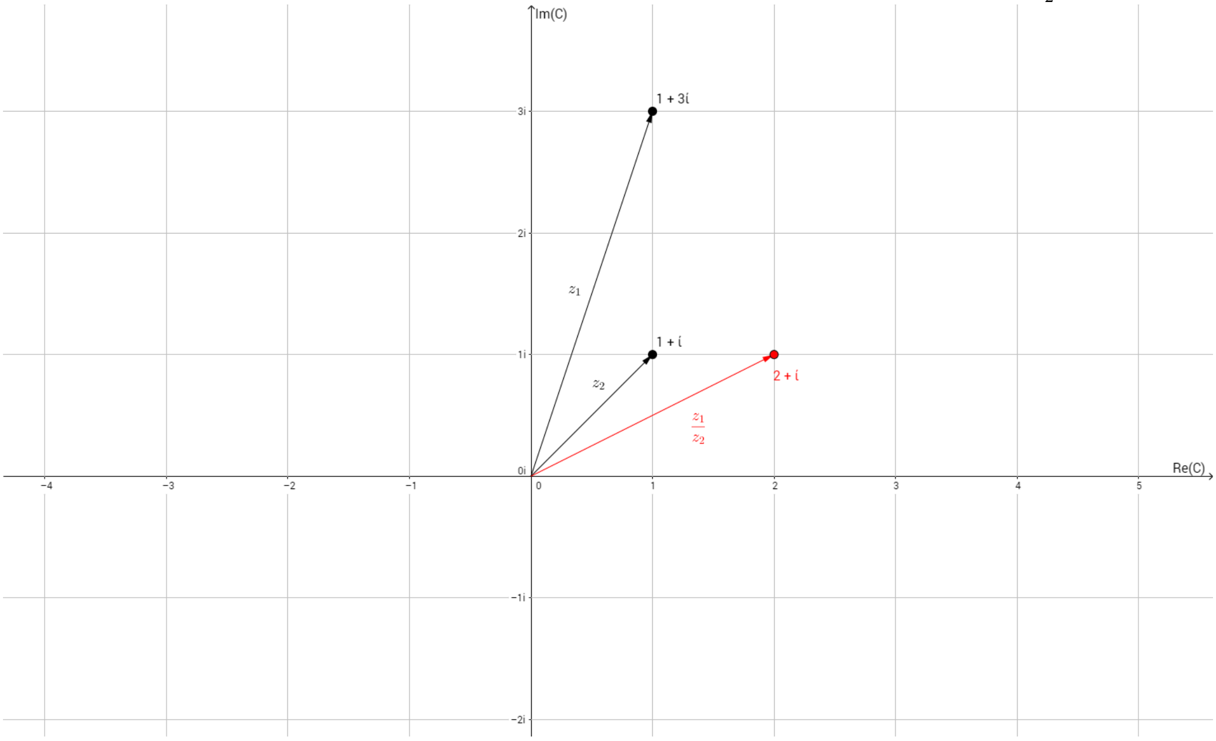
Esimerkki 12. Olkoon $z_1 = 3 + 3i$ ja $z_2 = 2 - i$. Laske

$$\frac{z_1}{z_2}\ .$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 3i}{2 - i} \\
&= \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (3 \cdot 2 - 3 \cdot (-1))i}{2^2 + (-1)^2} \\
&= \frac{6 - 3 + (6 + 3)i}{5} \\
&= \frac{3 + 9i}{5}\ .
\end{aligned}$$

Kuva 5.4: Kompleksilukujen $z_1 = 1 + 3i$ ja $z_2 = 1 + i$ osamäärä $\frac{z_1}{z_2}$



5.3 Tehtäviä

Tehtävä 16 (Summan liittoluku)**.** Osoita, että summan liittoluku on liittolukujen summa, eli

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z_1} + \bar{z_2} \text{ kaikilla } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Tehtävä 17 (Tulon liittoluku)**.** Osoita, että tulon liittoluku on liittolukujen tulo, eli

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2} \text{ kaikilla } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Tehtävä 18 (Käänteisalkion liittoluku)**.** Osoita, että käänteisalkion liittoluku on liittoluvun käänteisalkio, eli

$$\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1} \text{ kaikilla } z \in \mathbb{C},\ z \neq 0.$$

Huomautus 5.5. Tässä tehtävässä kannattaa käyttää tehtävän 17 tulosta hyväksi.

Tehtävä 19. Osoita, että

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{x^2 + y^2},$$

kun $z = x + yi \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Tehtävä 20. Olkoon $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4i$ ja $z_3 = 1 - 2i$. Laske

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_3.$$

Tehtävä 21. Onko

$$\left(\frac{z}{z'}\right)^2 = \frac{z^2}{z'^2}$$

aina, kun $z, z' \in \mathbb{C}$?

Luku 6

Toisen asteen yhtälö

6.1 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Toisen asteen funktiot kompleksiluvuilla eivät merkittävästi eroa reaalilukujen tapauksesta. Koska kompleksilukujen laskutoimitusten säännöt vastaavat reaalilukujen vastaavia (tehtävät kappaleista 3.4 ja 5.3), niin erityisesti tuttu toisen asteen yhtälön ratkaisukaava pätee.

Lause 6.1. *Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ toisen asteen polynomi, eli muotoa $f(z) = az^2 + bz + c$ joillain $a, b, c \in \mathbb{C}$. Tällöin*

$$f(z) = 0 \iff z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Huomautus 6.2. Neliöjuuren määrittelemme seuraavassa kappaleessa.

Todistus. *Oletetaan tunnetuksi.*

6.1.1 Esimerkkejä

Esimerkki 13. Ratkaise funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (2 - i)z^2 - iz + 3 - 2i$ nollakohdat.

Ratkaisu. *Aloitetaan merkitsemällä $a = 2 - i$, $b = -i$ ja $c = 3 - 2i$. Tällöin lauseen 6.1* *mukaan*

$$
\begin{aligned}
(2-i)z^2 - iz + 3 - 2i &= 0 \\
\iff z &= \frac{-(-i) \pm \sqrt{(-i)^2 - 4(2-i)(3-2i)}}{2(2-i)} \\
&= \frac{i \pm \sqrt{-1-(16-28i)}}{4-2i} \\
&= \frac{i}{4-2i} \pm \frac{\sqrt{-17+28i}}{4-2i} \\
&= -\frac{1-2i}{10} \pm \frac{\sqrt{-17+28i}}{4-2i}.
\end{aligned}
$$

Ratkaisu on vielä keskeneräinen, palaamme siihen seuraavan kappaleen jälkeen.

6.2 Kompleksiluvun neliöjuuri

Jos $w \in \mathbb{C}$ on jokin kompleksiluku, niin silloin se, että $\sqrt{w} = z$ on jokin toinen kompleksiluku, on yhtäpitävää sen kanssa, että $z^2 = w$. Voimme siis kääntää alkuperäisen ongelman nurin, ja etsiä sen sijaan lukuja, joiden neliö on alkuperäinen w.

Määritelmä 6.3. Olkoon $w, z \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\sqrt{w} = z \iff z^2 = w.$$

Huomautus 6.4.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Määritelmä 6.5 (Luvun merkki)**.** Olkoon $0 \neq v \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\operatorname{sign}(v) = \begin{cases} +1, \text{ jos } v > 0 \\ -1, \text{ jos } v < 0. \end{cases}$$

Seuraavaksi selvitämme kompleksiluvun w juuret $\sqrt{w} = z$ joillain $z \in \mathbb{C}$.

Lause 6.6. *Olkoon $z = x + yi, w = u + vi \in \mathbb{C}$ ja $z^2 = w$. Tällöin*

$$\text{i) } z = \begin{cases} \pm\sqrt{u} \ (\in \mathbb{R}), \textit{ jos } u > 0 \\ 0 \ (\in \mathbb{R}), \textit{ jos } u = 0 \\ \pm i\sqrt{-u} \ (\notin \mathbb{R}), \textit{ jos } u < 0 \end{cases} \quad \text{, kun } v = 0 \text{ tai}$$

$$\text{ii) } z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2+v^2}+u)} + \operatorname{sign}(v) \cdot i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2+v^2}-u)}\right) \quad \text{, kun } v \neq 0.$$

Todistus. Tapaus (i): $v = 0$ *(toisin sanoen $w \in \mathbb{R}$). Tällöin*

$$\begin{aligned} z^2 &= w = u + 0i = u \in \mathbb{R} \\ z &= \pm\sqrt{u}. \end{aligned}$$

Jos u on positiivinen, on kyseessä aivan tavalliset reaalijuuret. Jos taas $u < 0$, niin $z = \pm i\sqrt{-u}$

$$\textit{(sillä } \left(\pm i\sqrt{-u}\right)^2 = i^2\left(\sqrt{-u}\right)^2 = i^2 \cdot |u| = -1 \cdot (-u) = u\textit{),}$$

missä $-u > 0$.

Tapaus (ii): $v \neq 0$ *(toisin sanoen $\mathbb{C} \ni w \notin \mathbb{R}$). Tällöin*

$$\begin{aligned} z^2 = (x+yi)^2 &= u + vi \\ \textit{eli } (x^2 - y^2) + 2xyi &= u + vi. \end{aligned}$$

Tästä saamme yhtälöparin

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases} \\ \underset{()^2}{\Longrightarrow} &\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = x^4 - & 2x^2y^2 + y^4 = u^2 \\ (2xy)^2 = & 4x^2y^2 = v^2 \end{cases} \\ \underset{+}{\Longrightarrow} &\; x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = u^2 + v^2 \\ \underset{\surd}{\Longrightarrow} &\; x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Valitsimme positiivisen neliöjuuren $+\sqrt{u^2 + v^2}$, sillä $x^2 + y^2 \geq 0$. Nyt saamme muodostettua uuden yhtälöparin

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} \\ x^2 - y^2 = u \end{cases} \\ \underset{\pm}{\Longrightarrow} &\begin{cases} 2x^2 = \sqrt{u^2 + v^2} + u \\ 2y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} - u \end{cases} \\ \underset{\cdot\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} &\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + v^2} + u\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + v^2} - u\right) \end{cases} \\ \underset{\surd}{\Longrightarrow} &\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + v^2} + u\right)} \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + v^2} - u\right)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Nyt tarkastelemme alun yhtälöä $2xy = v$. Tämä toteutuu, jos ja vain jos $\operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(v)$, *eli tulon xy merkki on sama kuin v:n merkki. Toisin sanoen*

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}+u\right)} + \operatorname{sign}(v)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}-u\right)} \cdot i \right).$$

$\square$

Huomautus 6.7. Reaalilukujen joukossa merkintä $\sqrt{x}$ on yksikäsitteisesti määrätty: jos $x \geq 0$, niin $\sqrt{x} \geq 0$. Toisin sanoen merkinnällä $\sqrt{a}$ tarkoitetaan aina luvun a positiivista juurta. Kun tarkoitetaan luvun a negatiivista juurta, merkitään $-\sqrt{a}$.

Kompleksilukujen joukossa lukujen $z \in \mathbb{C}$ neliöjuuret eivät ole välttämättä positiivisia tai negatiivisia (paitsi siinä poikkeustapauksessa, että $z \in \mathbb{R}$, kts. huomautus 4.2), jolloin myöskään merkintä $\sqrt{z}$ ei viittaa mihinkään tiettyyn neliöjuureen, jolloin merkintä ei ole yksikäsitteinen.

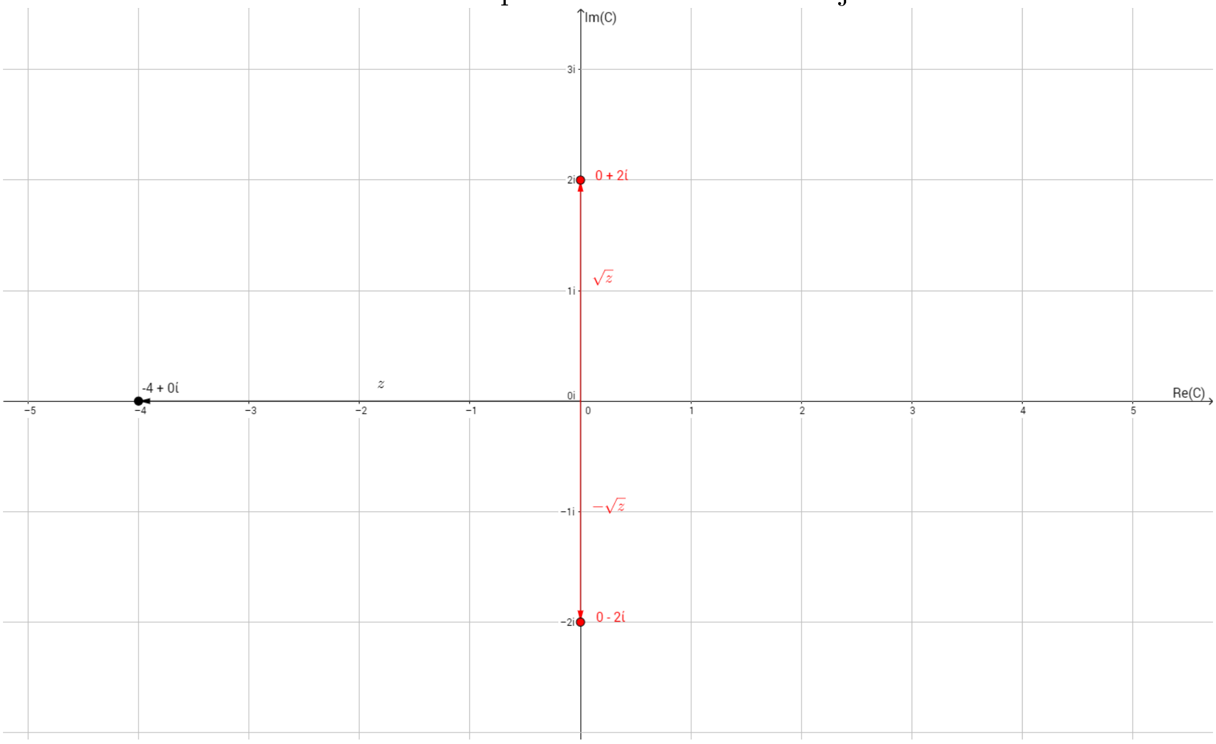
Reaalilukujen neliöjuurien laskusäännöt eivät ole sovellettavissa samalla tavoin kompleksilukujen joukossa. Varoittava esimerkki:

$$\begin{aligned}
-2 &= i^2\left(\sqrt{2}\right)^2 \\
&= \left(i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right) \\
&= \sqrt{-1}\sqrt{2}\sqrt{-1}\sqrt{2} \\
&= \sqrt{-2}\sqrt{-2} \\
&= \sqrt{(-2)(-2)} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

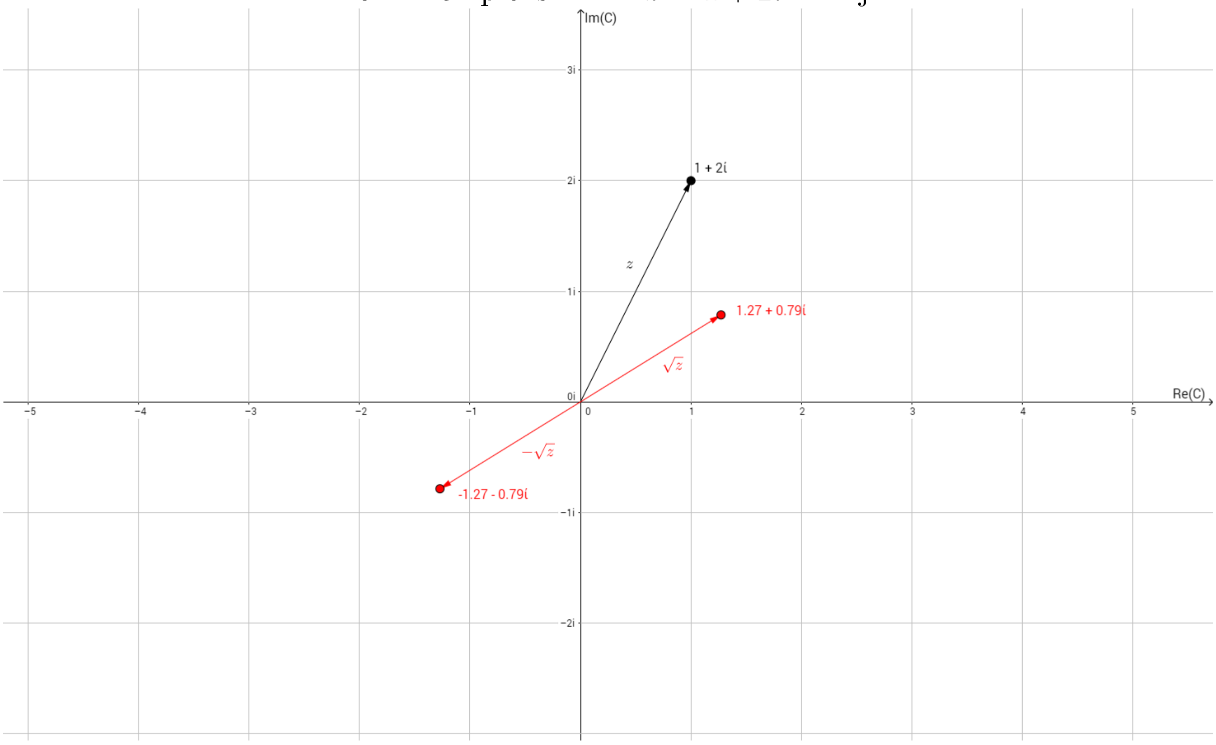
Yllä olevassa ristiriidassa on pohjimmiltaan kyse siitä, että kompleksiluvun neliöjuuri $\sqrt{z}$ viittaa kahteen eri arvoon.

6.2.1 Esimerkkejä

Kuva 6.1: Kompleksiluvun $z = -4$ neliöjuuret



Kuva 6.2: Kompleksiluvun $z = 1 + 2i$ neliöjuuret



Palataan seuraavaksi takaisin esimerkkiin 13.

Ratkaisu. *Olimme selvittäneet, että*

$$z = -\frac{1-2i}{10} \pm \frac{\sqrt{-17+28i}}{4-2i}.$$

Nyt meidän täytyy löytää kompleksiluvun $-17 + 28i$ *neliöjuuret.*

Olkoon $\sqrt{-17+28i} = w$, *missä* $w \in \mathbb{C}$. *Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että*

$$w^2 = -17 + 28i.$$

Tällöin edellisen lauseen nojalla

$$w = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(-17)^2+28^2}+(-17)\right)} + \operatorname{sign}(28)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(-17)^2+28^2}-(-17)\right)}\cdot i\right)$$
$$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1073}-17\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1073}+17\right)}\cdot i\right).$$

Tämän voimme nyt sijoittaa alkuperäiseen ratkaisuun, jolloin funktion $f(z)$ juuret ovat

$$z = -\frac{1-2i}{10} \pm \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1073}-17\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1073}+17\right)} \cdot i\right)}{4-2i}.$$

Esimerkki 14. Ratkaise funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 - (3+i)z + 2 + 2i$ nollakohdat.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} f(z) = 0 \iff \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 &= \frac{(3+i)^2}{4} - 2 - 2i \qquad \textit{kts. huomautus 6.4} \\ &= \frac{8+6i}{4} - 2 - 2i \\ &= -\frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Merkitään

$$w = u + vi = z - \frac{3+i}{2}.$$

Nyt käytämme vastaavaa päättelyä kuin lauseessa 6.6, jolloin

$$\begin{aligned} & w^2 = -\frac{1}{2}i \\ \iff & \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ 2uv = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} v = u \text{ tai } v = -u \\ 4uv = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nyt huomaamme, että jos $v = u$, niin $vu \geq 0 > -1$. Tällöin siis edellisen kohdan nojalla $v = -u$. Sijoittamalla jälkimmäiseen yhtälöön $v = -u$ saamme

$$\begin{aligned} -4u^2 &= -1 \\ 4u^2 &= 1 \\ u^2 &= \frac{1}{4} \\ u &= \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tunnemme nyt w:n molemmat osat, joten

$$w = u + vi = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \pm\frac{1}{2}(1-i).$$

Lähdimme liikkeelle yhtälöstä

$$w = z - \frac{3+1}{2},$$

josta ratkaisemme juuret z w:n avulla:

$$\begin{aligned} z &= \frac{3+i}{2} + w \\ &= \frac{3+i}{2} \pm \frac{1}{2}(1-i) = \begin{cases} 2 \\ 1+i. \end{cases} \end{aligned}$$

Huomautus 6.8. Olisimme voineet ratkaista luvun w^2 juuret myös suoraan lauseen 6.6 tulokseen sijoittamalla, nimittäin

$$\begin{aligned} & w^2 = -\frac{1}{2}i \\ \iff\ & w = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{0^2 + (-\frac{1}{2})^2} + 0\right)} + \operatorname{sign}(-\frac{1}{2})\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{0^2 + (-\frac{1}{2})^2} - 0\right)} \cdot i\right) \\ & = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}}} - \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}}} \cdot i\right) \\ & = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}i\right) \\ & = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ & = \pm\frac{1}{2}(1-i). \end{aligned}$$

6.3 Tehtäviä

Tehtävä 22. Laske $\sqrt{\frac{1}{4}i}$.

Ohje: tässä ja muissakin tehtävissä lausu luvun molemmat juuret.

Tehtävä 23. Laske $\sqrt{3+2i}$.

Tehtävä 24. Laske $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}i}$.

Tehtävä 25. Ratkaise funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 4z^2 + 2$ juuret.

Tehtävä 26. Ratkaise funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + (2-i)z - i$ juuret.

Tehtävä 27. Ovatko neliöjuurien

$$\sqrt{\frac{z}{z'}} \text{ ja } \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z'}}$$

arvojoukot samat, kun $z, z' \in \mathbb{C}$ ja $z' \neq 0$?

Luku 7

Itseisarvo

7.1 Itseisarvo

Itseisarvo, myös *moduli*, kuvaa reaaliavaruuksissa alkion "pituutta". Pituus on toisin sanoen alkion etäisyys origosta.

Määritelmä 7.1. Olkoon $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Tällöin z:n itseisarvo (moduli) on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

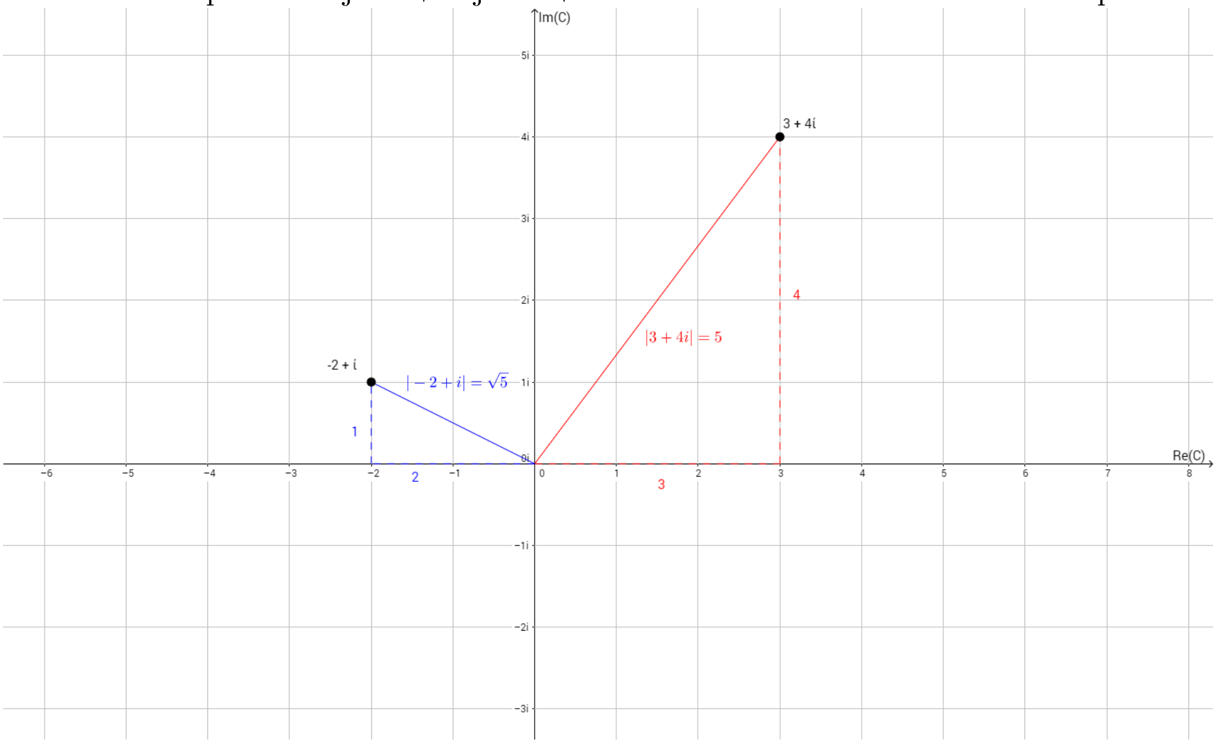
Huomautus 7.2. Huomioita:

1. Mikäli $y = 0$ (eli $z \in \mathbb{R}$), niin $|z| = \sqrt{x^2 + 0} = \sqrt{x^2} = |x|$, joka on tavallinen reaaliluvun itseisarvo.

2. Kaava johdetaan suoraan Pythagoraan lauseesta.

7.1.1 Esimerkkejä

Kuva 7.1: Kompleksilukujen $3+4i$ ja $-2+i$ itseisarvot ovat vastaavien vektorien pituudet



Esimerkki 15. Laske $|4-3i|$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} |4-3i| &= \sqrt{4^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Esimerkki 16. Osoita, että $|z|^2 = |z^2|$, aina kun $z \in \mathbb{C}$.

Ratkaisu. *Olkoon $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Tällöin*

$$\begin{aligned}
\left|z^2\right| &= \left|x^2 - y^2 + 2xyi\right| \\
&= \sqrt{\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2} \\
&= \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} \\
&= \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \\
&= \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\
&= x^2 + y^2 \\
&= |z|^2
\end{aligned}$$

7.2 Itseisarvon ominaisuuksia

Kompleksiluvun itseisarvolla on monia samoja ominaisuuksia kuin reaaliluvun itseisarvolla.

Lause 7.3. *Olkoon $z, z' \in \mathbb{C}$. Tällöin*

1. $z = 0 \iff |z| = 0$ *ja siis* $z \neq 0 \iff |z| > 0$,
2. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$,
3. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$,
4. (Kolmioepäyhtälö) $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$,
5. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ *ja* $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

Todistus. *Olkoon $z, z' \in \mathbb{C}$.*

1,2&3. Jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

4. Merkitään $z = x + yi$ ja $z' = u + vi$. Todistetaan ensin $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= \left(\sqrt{(x + u)^2 + (y + v)^2}\right)^2 \\
&= (x + u)^2 + (y + v)^2 \\
&= x^2 + 2xu + u^2 + y^2 + 2yv + v^2 \\
&= (x^2 + y^2) + (u^2 + v^2) + 2xu + 2yv \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2(xu + yv).
\end{aligned}$$

Tarkastellaan tässä välissä termiä $xu + yv$:

$$\begin{aligned}(xu+yv)^2 &= (xu)^2 + 2xuyv + (yv)^2 \\ &\leq (xu)^2 + 2xuyv + (yv)^2 + (xv-yu)^2, \qquad \textit{sillä } (xv-yu)^2 \geq 0 \\ &= (xu)^2 + 2xuyv + (yv)^2 + (xv)^2 - 2xvyu + (yu)^2 \\ &= (xu)^2 + (yv)^2 + (xv)^2 + (yu)^2 \\ &= (x^2+y^2)(u^2+v^2).\end{aligned}$$

Siis olemme saaneet

$$\begin{aligned}(xu+yv)^2 &\leq (x^2+y^2)(u^2+v^2), \\ \textit{mistä seuraa } xu+yv &\leq \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2} = |z|\cdot|z'|\,.\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä tieto ensimmäiseen yhtälöömme saamme

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= |z|^2 + |z'|^2 + 2(xu+yv) \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z|\cdot|z'| \\ &= (|z| + |z'|)^2\,,\end{aligned}$$

mistä seuraa

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|\,.$$

Huomautus 7.4. Käytimme tässä useammankin kerran seuraavaa tietoa:

Olkoot $0 \leq x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

Nyt todistamme, että $||z| - |z'|| \leq |z+z'|$. Huomaamme edellä todistetun nojalla, että

$$\begin{aligned}|z| &= |z+z'-z'| \\ |z| &\leq |z+z'| + |-z'| \\ |z| &\leq |z+z'| + |z'| \\ |z| - |z'| &\leq |z+z'|\,.\end{aligned}$$

Samalla tavoin

$$\begin{aligned}|z'| &= |z'+z-z| \\ |z'| - |z| &\leq |z'+z|\,,\end{aligned}$$

Näistä seuraa, että

$$||z| - |z'|| \leq |z+z'|\,.$$

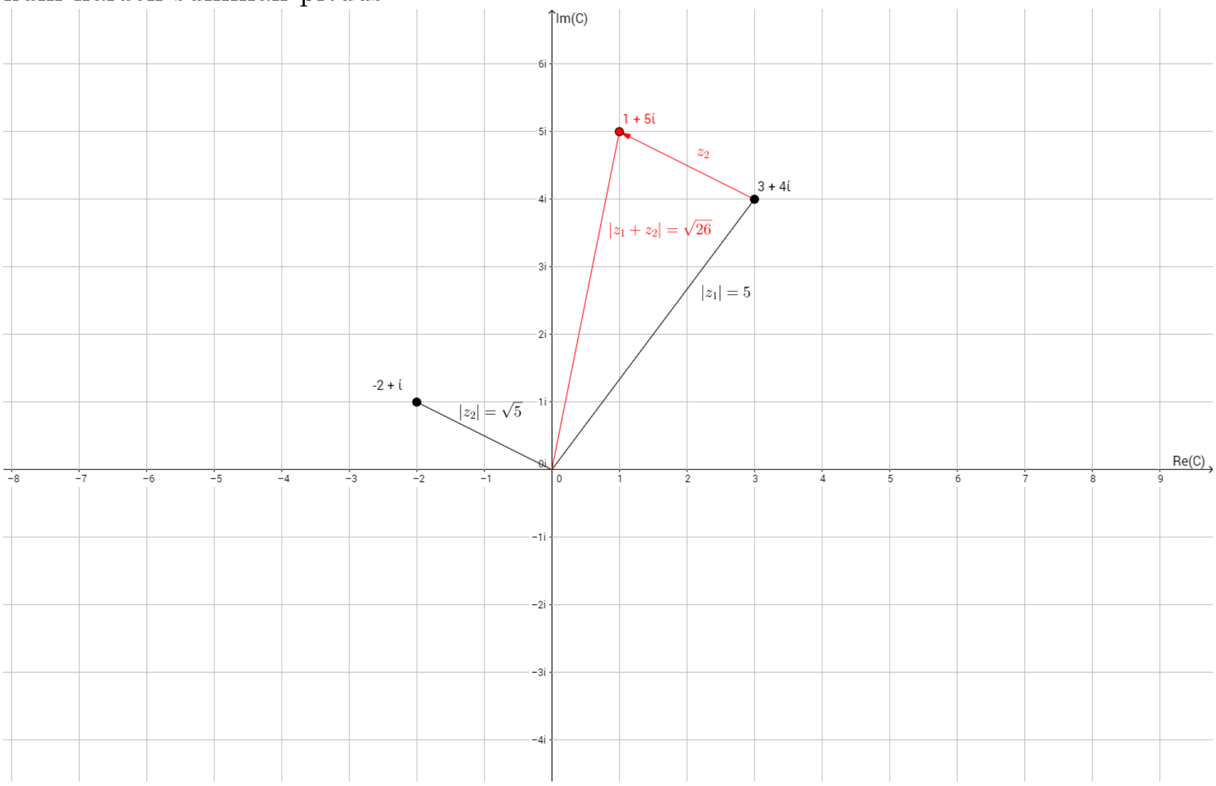
5. *Selvästi*

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Re}(z)| &= |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|\,, \\
|\mathrm{Im}(z)| &= |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z| \ \ \textit{ja} \\
|z| &= |x+yi| \\
&\leq |x| + |yi| \\
&= |x| + |y|\,|i| \\
&= |x| + |y| \\
&= |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|
\end{aligned}
$$

□

7.2.1 Esimerkkejä

Kuva 7.2: Kompleksilukujen $z_1 = 3 + 4i$ ja $z_2 = -2 + i$ pituuksien summa on suurempi kuin näiden summan pituus



Esimerkki 17. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$|z^n| = |z|^n.$$

Ratkaisu. *Todistetaan induktiolla. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja $n = 2$. Tällöin lauseen 7.3 kohdan 3 mukaan*

$$\left|z^2\right| = |z|^2.$$

Oletetaan, että on olemassa $k \in \mathbb{N}$, jolla

$$\left|z^k\right| = |z|^k.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\left|z^{k+1}\right| &= \left|z^k \cdot z\right| \\ &= \left|z^k\right| \cdot |z| \\ &= |z|^k \cdot |z| \\ &= |z|^{k+1}.\end{aligned}$$

7.3 Tehtäviä

Tehtävä 28. Laske $|-9 + 16i|$.

Tehtävä 29. Laske

$$\left|\frac{4-2i}{4i}\right|.$$

Tehtävä 30. Laske $\left|\sqrt{-\frac{1}{2}i}\right|$

Tehtävä 31. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Osoita, että

$$|-z| = |z|.$$

Tehtävä 32. Todista lauseen 7.3 kohta 1.

Tehtävä 33. Todista lauseen 7.3 kohta 2.

Tehtävä 34. Todista lauseen 7.3 kohta 3.

Tehtävä 35. Olkoon $z, z' \in \mathbb{C}$. Osoita, että

$$|z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

Tehtävä 36. Onko $\sqrt{|z|} = |\sqrt{z}|$ aina, kun $z \in \mathbb{C}$?

Tehtävä 37. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$. Osoita, että

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Luku 8

Napakoordinaatit

8.1 Piste pituuden ja kierron funktiona

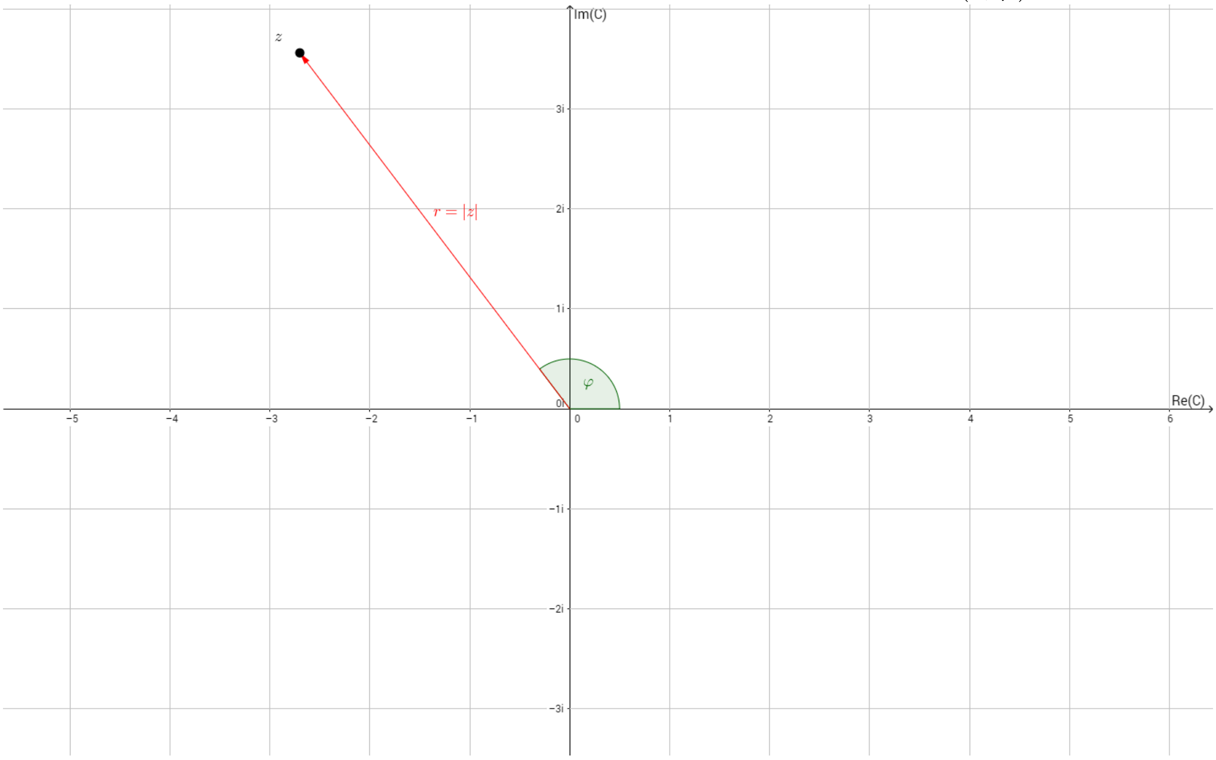
Olemme tähän mennessä ilmaisseet kompleksiluvut koordinaattiensa avulla. Napakoordinaatit on notaatio (merkintätapa), joka ilmaisee kompleksiluvun sen pituuden ja kulman avulla.

Määritelmä 8.1. Olkoon $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Tällöin sen napakoordinaattimuoto on

$$\begin{aligned} z &= \frac{|z|}{|z|} \cdot z \\ &= |z| \cdot \frac{z}{|z|} \\ &= |z| \cdot \left(\frac{x + yi}{|z|} \right) \\ &= |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|} i \right) \\ &= r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned}$$

missä $r = |z|$ ja $\varphi = \angle z01$. Sanomme, että (r, φ) ovat luvun z *napakoordinaatit.*

Kuva 8.1: Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ napakoordinaatit ovat (r, φ)



Huomautus 8.2. Merkinnöistä:

1. Äskeisessä merkinnässä $z = x + yi$ on (kompleksi)tason piste (x, y), 0 tason piste origo $(0, 0)$ ja $1 = 1 + 0i$ tason piste $(1, 0)$.

2. Lukua $\varphi \in \mathbb{R}$ sanotaan luvun z argumentiksi, eli vaihekulmaksi, ja merkitään $\varphi = \arg(z)$. Luvun z muut argumentit ovat tällöin muotoa $\varphi + k \cdot 2\pi$.

3. Luvun 0 argumentiksi käyvät kaikki luvut $\varphi \in \mathbb{R}$.

Lause 8.3. *Kompleksiluvun napakoordinaatit ovat yksikäsitteiset.*

Huomautus 8.4. Tämä sisältää oletuksen, että kulman $\varphi \in \mathbb{R}$ voi aina samastaa kulman $\varphi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kanssa. Toisin sanoen, täysien kiertojen lisääminen ja poistaminen ei *muuta* kulmaa.

Todistus. *Olkoon* $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$ *ja* (r, φ), $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, *sen napakoordinaatit. Tehdään vastaoletus: on olemassa napakoordinaatit* (r', φ'), $r' > 0$, $\varphi' \in \mathbb{R}$, *joilla*

$$r' \cdot (\cos \varphi' + i \sin \varphi') = x + yi.$$

Tällöin $\varphi' \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *sillä muuten*

$$r' \cdot (\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \begin{cases} r' \in \mathbb{R} \text{ jos } 2 \mid k \\ -r' \in \mathbb{R} \text{ muuten} \end{cases},$$

joka on ristiriita. Nyt

$$\begin{aligned} r' \cdot (\cos\varphi' + i\sin\varphi') &= x + yi \\ r' \cdot (\cos\varphi' + i\sin\varphi') &= r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ |r' \cdot (\cos\varphi' + i\sin\varphi')| &= |r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)| \\ |r'| \cdot |\cos\varphi' + i\sin\varphi'| &= |r| \cdot |\cos\varphi + i\sin\varphi| && \text{kts. lause 7.3} \\ |r'| &= |r| && |\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1, \text{ kaikilla } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nyt ratkaisu $r' = -r$, *ei käy, koska oletuksen mukaan on oltava* $r' > 0$, *jolloin siis* $r' = r$. *Osoitetaan vielä, että on oltava* $\varphi' = \varphi + k \cdot 2\pi$, *jollakin* $k \in \mathbb{Z}$*:*

$$\begin{aligned} & \cos\varphi' + i\sin\varphi' = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \iff & \cos\varphi' = \cos\varphi \text{ ja } \sin\varphi' = \sin\varphi \\ \implies & \varphi' = \begin{cases} \varphi + k \cdot 2\pi \text{ tai} \\ -\varphi + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{ja } \varphi' = \begin{cases} \varphi + k \cdot 2\pi \text{ tai} \\ \pi - \varphi + k \cdot 2\pi, \end{cases} \quad \text{jollakin } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Jos $\varphi' = -\varphi + k \cdot 2\pi$, *niin* $\sin\varphi' = -\sin\varphi$, *tai jos* $\varphi' = \pi - \varphi + k \cdot 2\pi$, *niin* $\cos\varphi' = -\cos\varphi$, *kun* $k \in \mathbb{Z}$. *Kumpikaan näistä ei käy, jolloin ainoa ratkaisu on* $\varphi' = \varphi + k \cdot 2\pi$.

8.1.1 Esimerkkejä

Esimerkki 18. Mitkä ovat pisteen $z = 3 + 4i$ napakoordinaatit?

Ratkaisu. *Pisteen* z *pituus*

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5. \end{aligned}$$

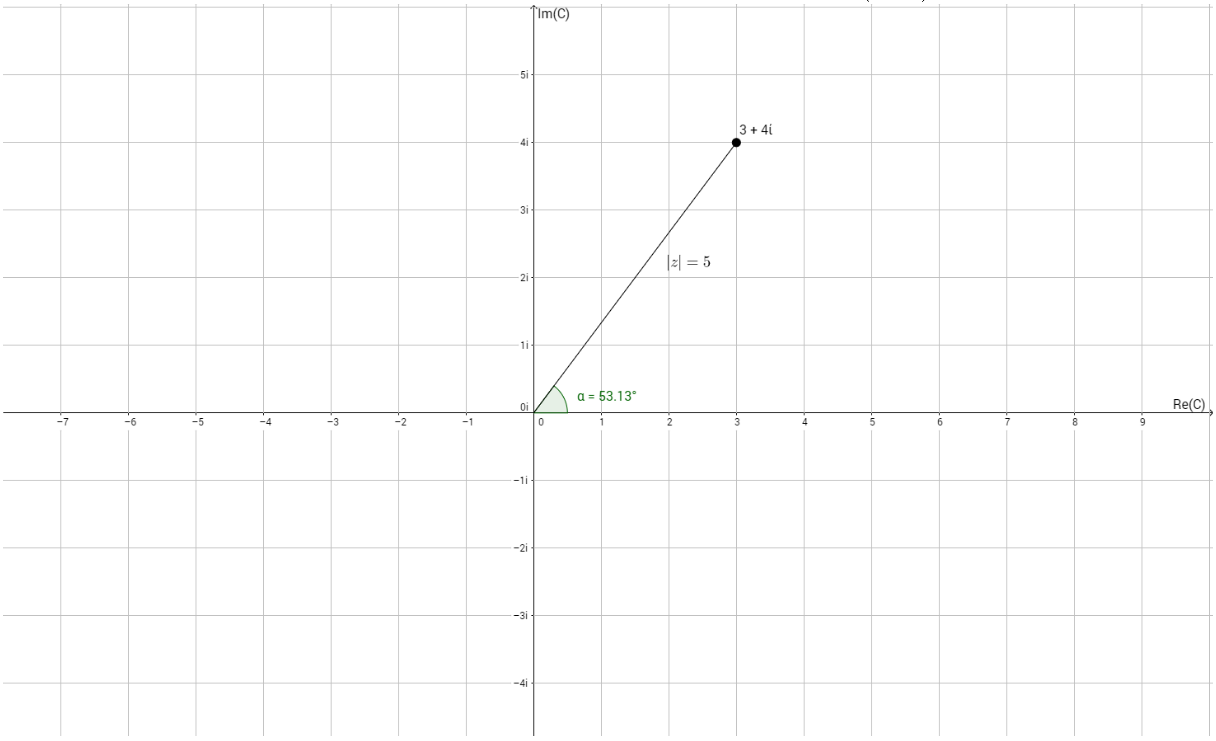
Nyt $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ *ja* $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, *jolloin*

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{3}{5} \approx \begin{cases} 53,13^\circ, \text{ tai} \\ 360^\circ - 53,13^\circ \end{cases} \quad \text{ja } \varphi = \sin^{-1}\frac{4}{5} \approx \begin{cases} 53,13^\circ, \text{ tai} \\ 180^\circ - 53,13^\circ \end{cases},$$

mistä seuraa $\varphi \approx 53,13^\circ$.

Nyt pisteen z *napakoordinaatit ovat* $(5, \varphi) \approx (5; 53,13^\circ)$.

Kuva 8.2: Kompleksiluvun $z = 3 + 4i$ napakoordinaatit ovat $(5, \alpha)$, missä $\alpha \approx 53,13°$



Huomautus 8.5. Äskeisessä esimerkissä kulma sattui olemaan yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä, mutta muissa tapauksissa argumentin ratkaisemiseksi tarvitsee tarkastella molempia trigonometrisia funtioita.

Esimerkki 19. Mitkä ovat pisteen $z = 2 - 2i$ napakoordinaatit?

Ratkaisu. *Pisteen z pituus*

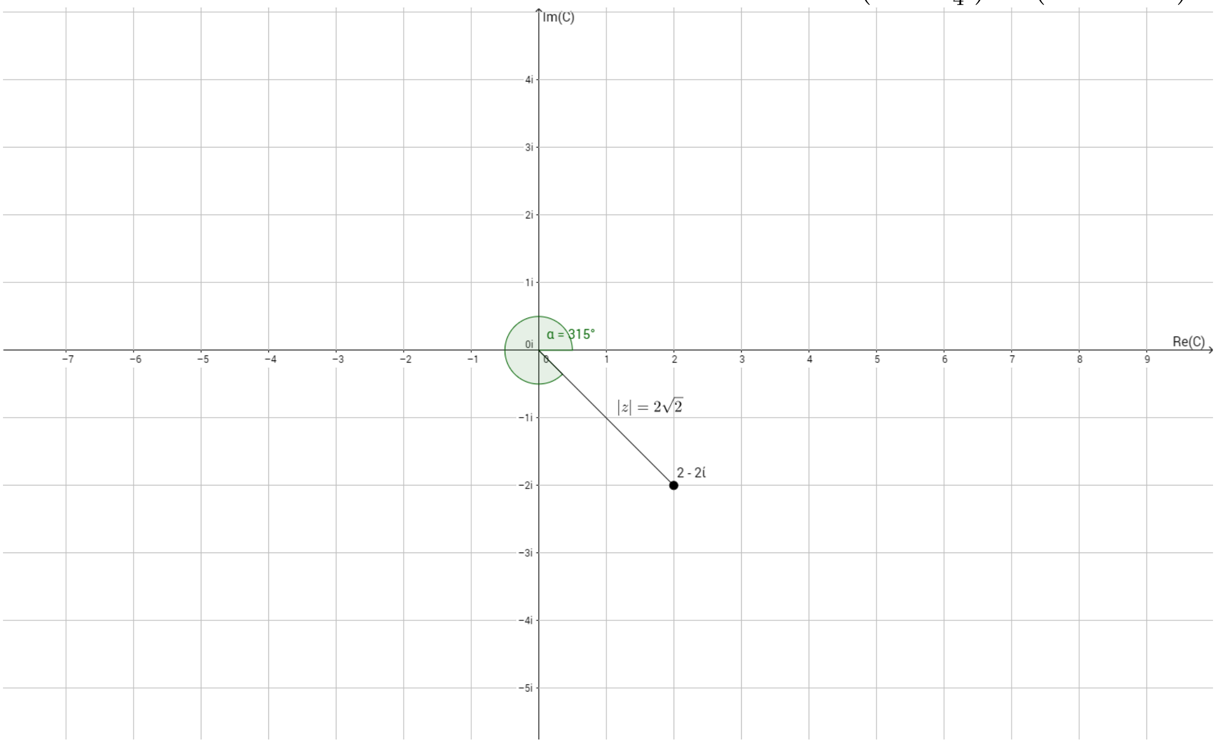
$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Nyt $\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *ja* $\sin\varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Tällöin*

$$
\begin{aligned}
&\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \textit{ ja } \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\implies &\varphi = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \textit{ tai} \\ 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \textit{ja } \varphi = \sin^{-1} -\frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 2\pi - \frac{\pi}{4} \textit{ tai} \\ 2\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases} \\
\implies &\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Pisteen z napakoordinaatit ovat siis $\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Kuva 8.3: Kompleksiluvun $z = 2 - 2i$ napakoordinaatit ovat $\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right) = \left(2\sqrt{2}, 315°\right)$



Esimerkki 20. Olkoon $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ yksikköympyrä. Osoita, että

$$z \in S^1 \implies z^2 \in S^1.$$

Huomautus 8.6. Yksikköympyrä on siis joukko, joka sisältää kaikki ne kompleksitason pisteet, joiden pituus on 1.

Ratkaisu. *Olkoon* $z \in S^1$. *Tällöin* $|z| = 1$ *ja sen napakoordinaattimuoto on*

$$z = 1\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

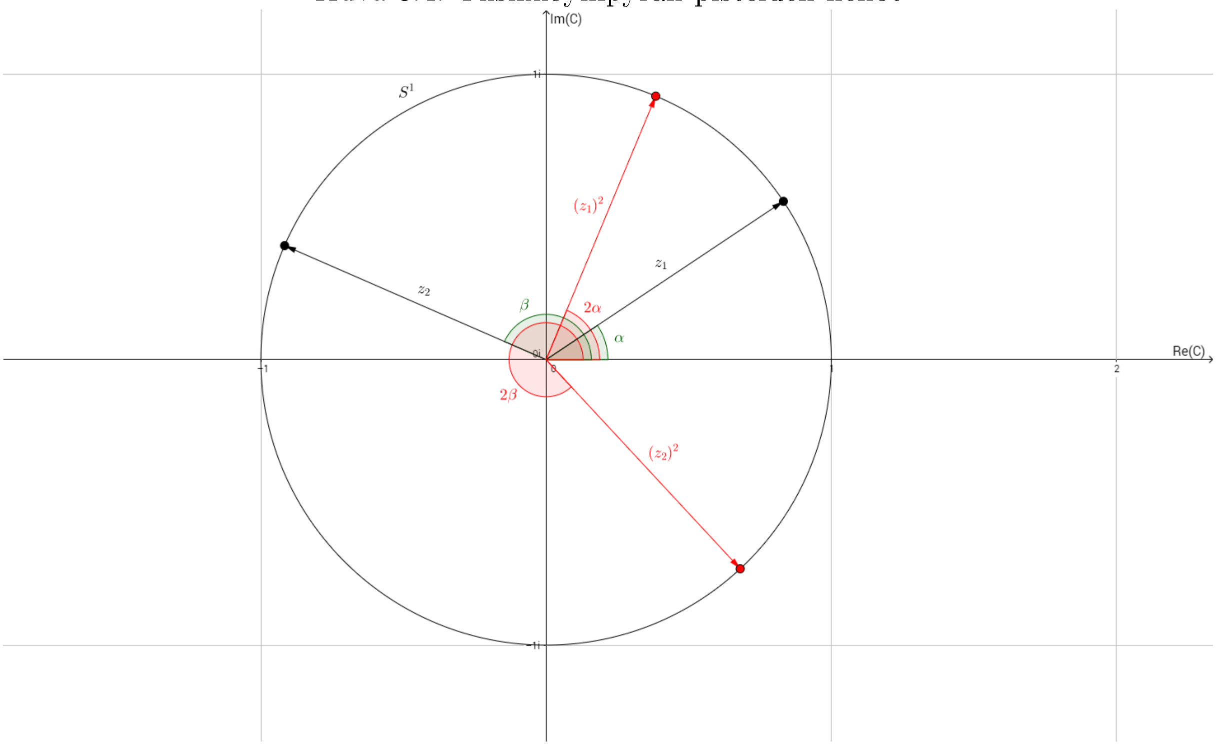
jollakin $\varphi \in \mathbb{R}$. *Tällöin pisteen* z^2 *napakoordinaattimuoto on*

$$\begin{aligned} z^2 &= 1^2\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^2 \\ &= 1\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^2 \\ &= 1\left(\cos^2\varphi + i2\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ &= 1\left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right). \end{aligned}$$

Siis myös pisteen z^2 *pituus* r *on* 1, *jolloin sekin on yksikköympyrän piste. Eli* $z^2 \in S^1$

Huomautus 8.7. Kompleksiluvun toiseen korotus siis tuplaa sen argumentin.

Kuva 8.4: Yksikköympyrän pisteiden neliöt

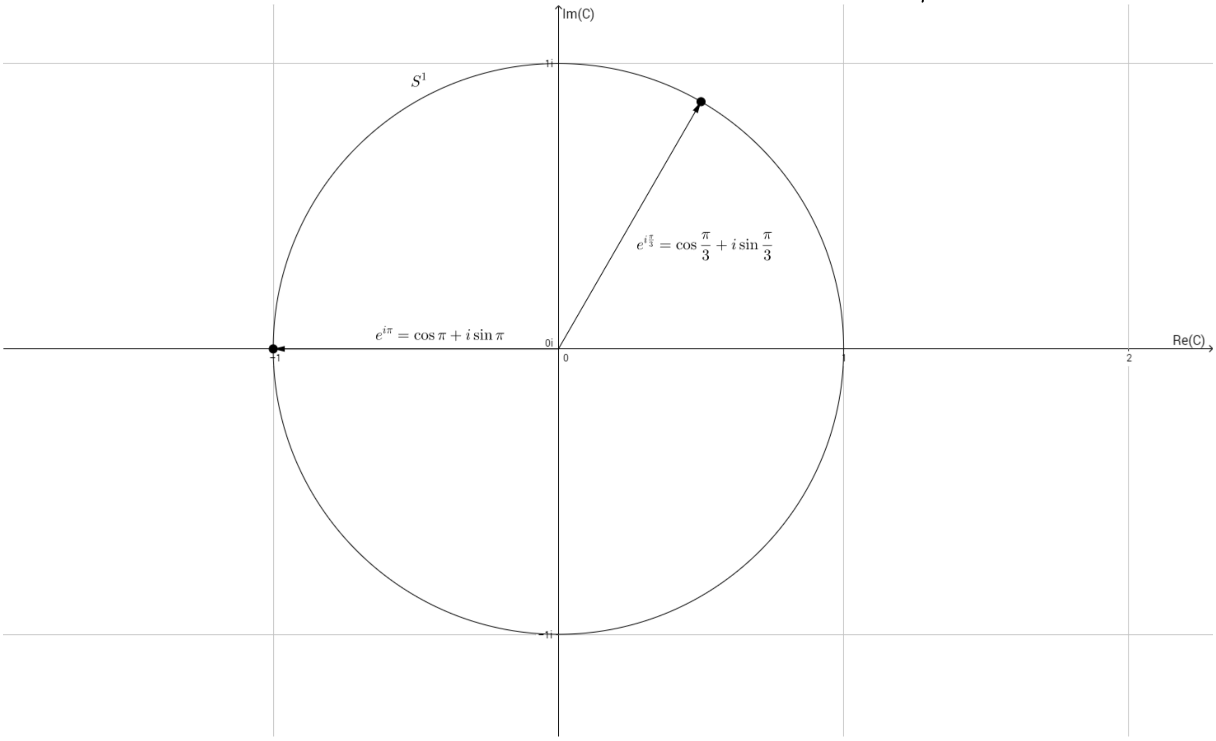


8.2 Eulerin kaava

Määritelmä 8.8 (Eulerin kaava)**.** Olkoon $\varphi \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Kuva 8.5: Eulerin kaavan mukaan $e^{i\varphi} \in S^1$ kaikilla $\varphi \in \mathbb{R}$



Huomautus 8.9. Eulerin kaavasta:

1. Tällä kertaa kaava vain "annetaan", sillä kaavan johtamiseen tarvittavia määritelmiä ja rakenteita ei tässä kirjassa käsitellä.

2. Kaavaan on helppo todistus käyttäen Taylorin sarjoja ja imaginaariyksikön potenssin ominaisuuksia (tehtävä 5). Todistus löytyy muun muassa Lars Ahlforsin teoksesta "*Complex Analysis*" [1].

Huomautus 8.10. Kaavasta voidaan johtaa Eulerin identiteetti sijoittamalla $\varphi = \pi$:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos\pi + i\sin\pi \\ e^{i\pi} &= -1 + 0i \\ e^{i\pi} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Korollaari 8.11. *Olkoon $z \in \mathbb{C}$, jolla on napakoordinaatit (r, φ). Tällöin sen napakoordinaattimuoto on*

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= re^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Lause 8.12. *Olkoot* $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

1. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$,
2. $e^{i\varphi} \cdot e^{i(-\varphi)} = 1$,
3. $e^{i(-\varphi)} = e^{-i\varphi} = \left(e^{i\varphi}\right)^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$,
4. $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$.

Todistus. *Oletetaan* $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

1. *Sinin ja kosinin summakaavojen mukaan*

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} &= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}. \end{aligned}$$

2&3. Jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

4. *Kohdan (3) mukaan*

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} &= e^{i(\varphi_1+(-\varphi_2))} \\ &= e^{i\varphi_1}\cdot e^{i(-\varphi_2)} \\ &= e^{i\varphi_1}\cdot\left(e^{i\varphi_2}\right)^{-1} \\ &= \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} \ . \end{aligned}$$

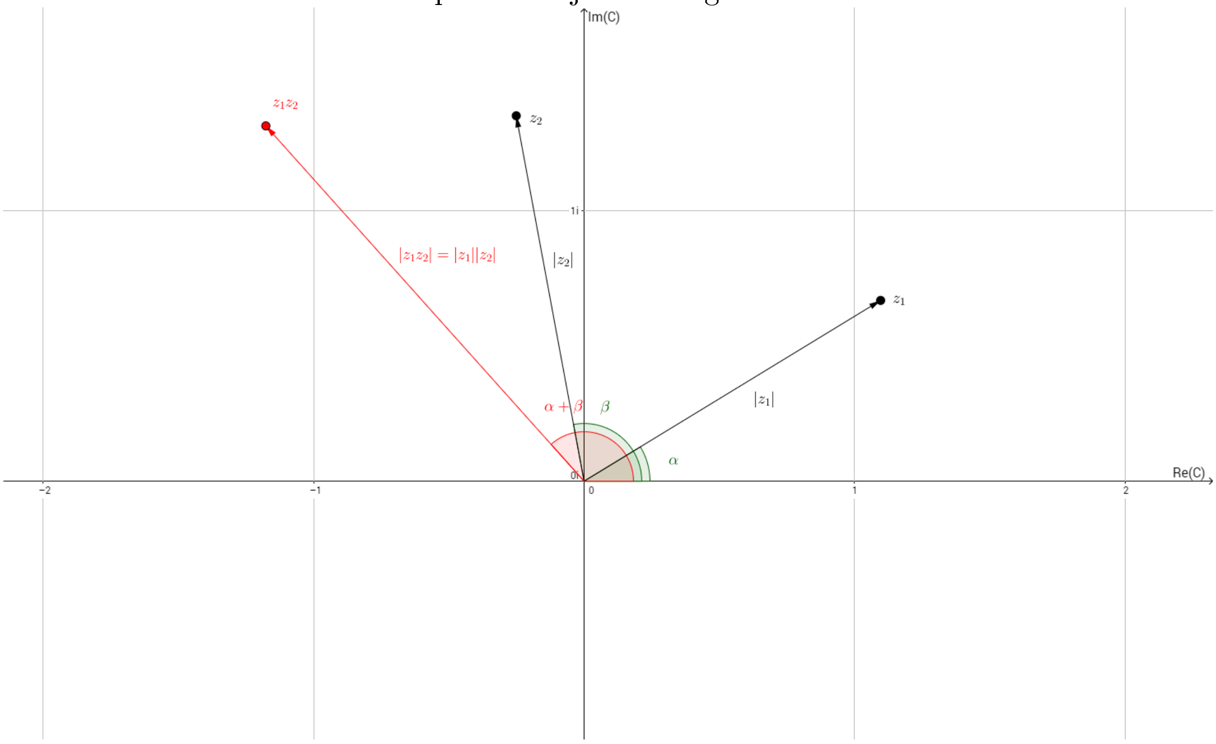
Korollaari 8.13. *Olkoot* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $r_j = |z_j|$ *ja* $\varphi_j = \arg(z_j)$, $j = 1, 2$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \text{ ja} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \text{ jos } z_2 \neq 0 \end{aligned}$$

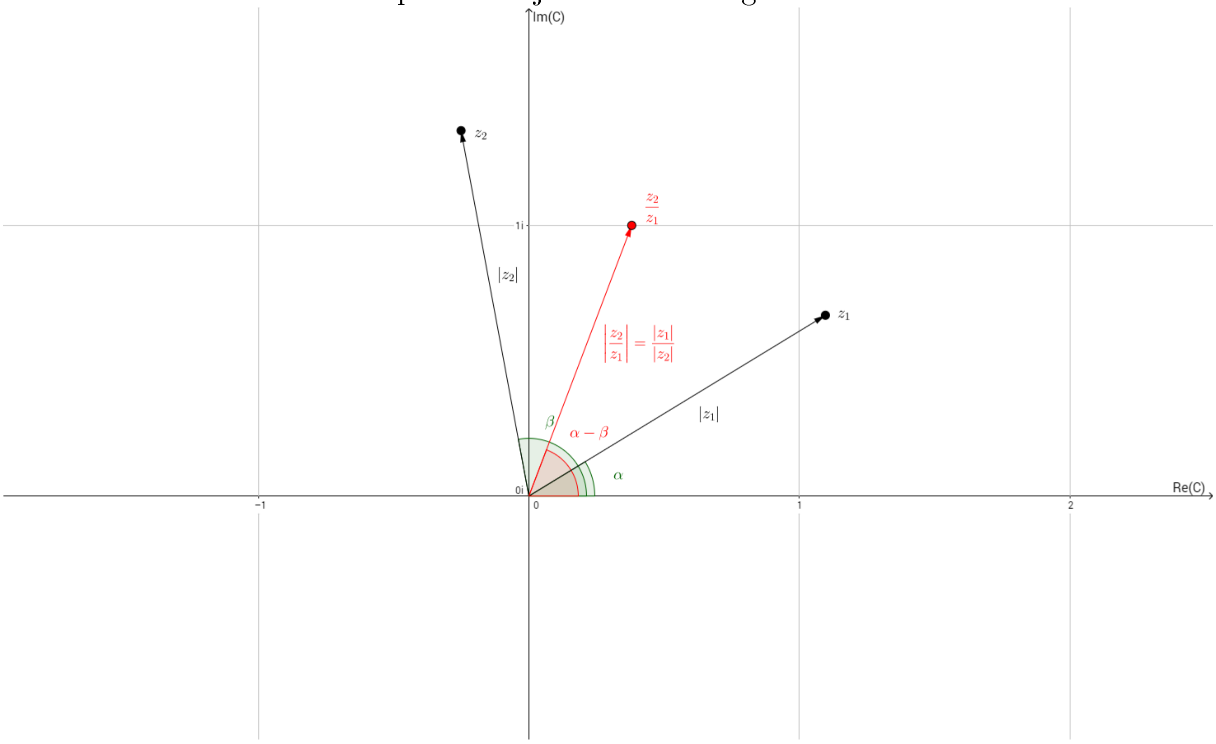
ja

$$\begin{aligned} \arg(z_1\cdot z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \ \text{ ja} \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2)\,, \text{ jos } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Kuva 8.6: Kompleksilukujen tulon geometrinen tulkinta



Kuva 8.7: Kompleksilukujen osamäärän geometrinen tulkinta



Lause 8.14. *Jos $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\arg\left(z^n\right) = n \cdot \arg\left(z\right).$$

Todistus. *Jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.*

Lause 8.15 (De Moivren kaava)**.** *Olkoon $\varphi \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right),$$
$$\textit{eli} \quad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Todistus. *Jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.* □

8.2.1 Esimerkkejä

Esimerkki 21. Laske $(1+i)^6$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \textit{ jolloin} \\ (1+i)^6 &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^6 \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 \\ &= 8 \cdot e^{i\frac{6\pi}{4}} \\ &= 8 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ &= 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= -8i. \end{aligned}$$

Esimerkki 22. Lausu $\cos 3\varphi$ ja $\sin 3\varphi$ lukujen $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ avulla.

Ratkaisu. *De Moivren kaavan mukaan*

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi i\sin\varphi + 3\cos\varphi\,(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + \left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right) i\ , \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ \sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi. \end{cases}$$

8.3 Tehtäviä

Tehtävä 38. Todista lauseen 8.12 kohdat 2 ja 3.

Tehtävä 39. Todista lause 8.14.

Tehtävä 40. Todista De Moivren kaava (lause 8.15).

Tehtävä 41. Laske $(3+2i)^5$.

Tehtävä 42. Lausu $\cos 5\varphi$ ja $\sin 5\varphi$ lukujen $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ avulla.
Ohje: katso apua esimerkistä 22.

Luku 9

Binomiyhtälöt

9.1 Neliöjuuri

Napakoordinaatit antavat tärkeän geometrisen tulkinnan kerto- ja jakolaskulle: kompleksilukujen (napakoordinaateissa) (r_1, φ_1) ja (r_2, φ_2) tulo $(r_1, \varphi_1) \cdot (r_2, \varphi_2) = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$ on kompleksiluku, jonka pituus on parametriensa pituuksien tulo (vertaa reaalilukuihin) ja argumentti näiden argumenttien summa.

Toisin sanoen kompleksiluvun z kertominen kompleksiluvulla z' *skaalaa* vektoria z vektorin z' pituudella ja *kiertää* vektorin z' argumentilla. Voimme käyttää tätä tietoa kompleksiluvun neliöjuuren geometriseen tulkintaan.

Lause 9.1. *Olkoon $z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$ ja $z^2 = w$. Tällöin luvun w neliöjuuret ovat*

$$\begin{cases} \sqrt{\rho} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \\ \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right)}. \end{cases}$$

Todistus. *Oletetaan, että $z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$ ja $z^2 = w$. Tällöin*

$$z^2 = w \iff r^2 e^{i2\varphi} = \rho e^{i\vartheta}.$$

Lauseen 8.3 nojalla

$$\begin{aligned} & r^2 = \rho \text{ ja } 2\varphi = \vartheta + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \iff & r = \sqrt{\rho} \text{ ja } \varphi = \frac{\vartheta}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ympyrän kierron syklisyydestä johtuen, voimme rajoittaa k:n lukuihin 0 *ja* 1. *Tällöin siis luvun w neliöjuuret ovat*

$$\sqrt{\rho} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \text{ ja } \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right)}.$$

$\square$

9.1.1 Esimerkkejä

Esimerkki 23. Laske luvun $e^{i\frac{5\pi}{3}}$ neliöjuuret.

Ratkaisu. *Nyt* $|z^2| = 1 \implies |z| = 1$. *Luvun* z^2 *juurien argumentit ovat nyt* $\frac{5\pi}{6}$ *ja* $\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$. *Siis juuret ovat*

$$\begin{cases} z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ z' = e^{i\frac{11\pi}{6}}. \end{cases}$$

Esimerkki 24. Laske luvun $6 + 8i$ neliöjuuret.

Ratkaisu. *Merkitään* $w = 6 + 8i$. *Tämän napakoordinaatit ovat*

$$\begin{cases} |w| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \\ \arg w = \begin{cases} \cos^{-1}\frac{3}{5} \\ \sin^{-1}\frac{4}{5} \end{cases} \approx 53,13 \text{ (kts. esimerkki 18).} \end{cases}$$

Merkitään $\vartheta = \cos^{-1}\frac{3}{5}$. *Tällöin luvun* w *neliöjuurien* z *ja* z' *pituus on* $\sqrt{10}$ *ja argumentit ovat* $\frac{\vartheta}{2}$ *ja* $\frac{\vartheta}{2} + \pi$. *Nyt neliöjuuret* z *ja* z' *ovat*

$$\begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \text{ (1. neljännes) ja} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{10}e^{i\frac{\vartheta}{2}} \\
&= \sqrt{10}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right), \\
&= \sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{1 + cos\vartheta}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - cos\vartheta}{2}}\right) \\
&= \sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}\right) \\
&= \sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{4}{5}} + i\sqrt{\frac{1}{5}}\right) \\
&= \sqrt{10}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}} + i\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{\frac{40}{5}} + i\sqrt{\frac{10}{5}} \\
&= \sqrt{8} + i\sqrt{2}
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
z' &= \sqrt{10}e^{i\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right)} \\
&= \sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right)\right), \qquad \begin{cases}\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \text{ ja} \\ \sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha\end{cases} \\
&= \sqrt{10}\left(-\cos\frac{\vartheta}{2} - i\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \\
&= \sqrt{10}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - i\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\
&= -\sqrt{8} - i\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

9.2 Yleinen tapaus

Yleisessä tapauksessa binomiyhtälöllä $z^n = w$ on n kappaletta ratkaisuja. Ratkaisut muodostavat aina säännöllisen n-kulmion $\sqrt[n]{\rho}$-säteisellä kiekolla.

Lause 9.2. *Binomiyhtälön $z^n = w = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ juuret ovat $z_0 \cdot \varepsilon_n^k$, $k = 0, 1, ..., n-1$, missä $z_0 = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n}\right)}$ ja $\varepsilon_n = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$.*

Huomautus 9.3. Juuret tulkitaan niin, että “perusratkaisu” on z_0, jota kierretään $\frac{2\pi}{n}$ verran $n-1$ kertaa. Näin muodostuu säännöllinen n-kulmio $|z_0|$-säteisellä kiekolla.

Todistus. *Olkoon $w = \rho e^{i\vartheta}, z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $\rho = |w| > 0$, $r = |z| > 0$, $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$ ja $z^n = w$. Tällöin*

$$
\begin{aligned}
z^n = w &\iff r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\vartheta} \\
&\iff r^n = \rho \text{ ja } n\varphi = \vartheta + k\cdot 2\pi \\
&\iff r = \sqrt[n]{\rho} \text{ ja } \varphi = \frac{\vartheta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n} \\
&\iff z = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \\
&\iff z = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n}\right)+ik\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\
&\iff z = \left(\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n}\right)}\right)\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Merkitään

$$
\begin{cases}
z_0 = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n}\right)} \text{ ja} \\
\varepsilon_n = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.
\end{cases}
$$

Nyt voimme rajoittaa eksponentin k arvoihin $\{0, ..., n-1\}$, sillä ratkaisu $k = n$ kiertää ensimmäistä ratkaisua z_0 täyden kierroksen, joten se on identtinen ratkaisun $k = 0$ kanssa.

Saimme siis, että binomiyhtälön $z^n = w$ juuret ovat $z_0 \cdot \varepsilon_n^k$, missä $k = 0, 1, ..., n-1$. □

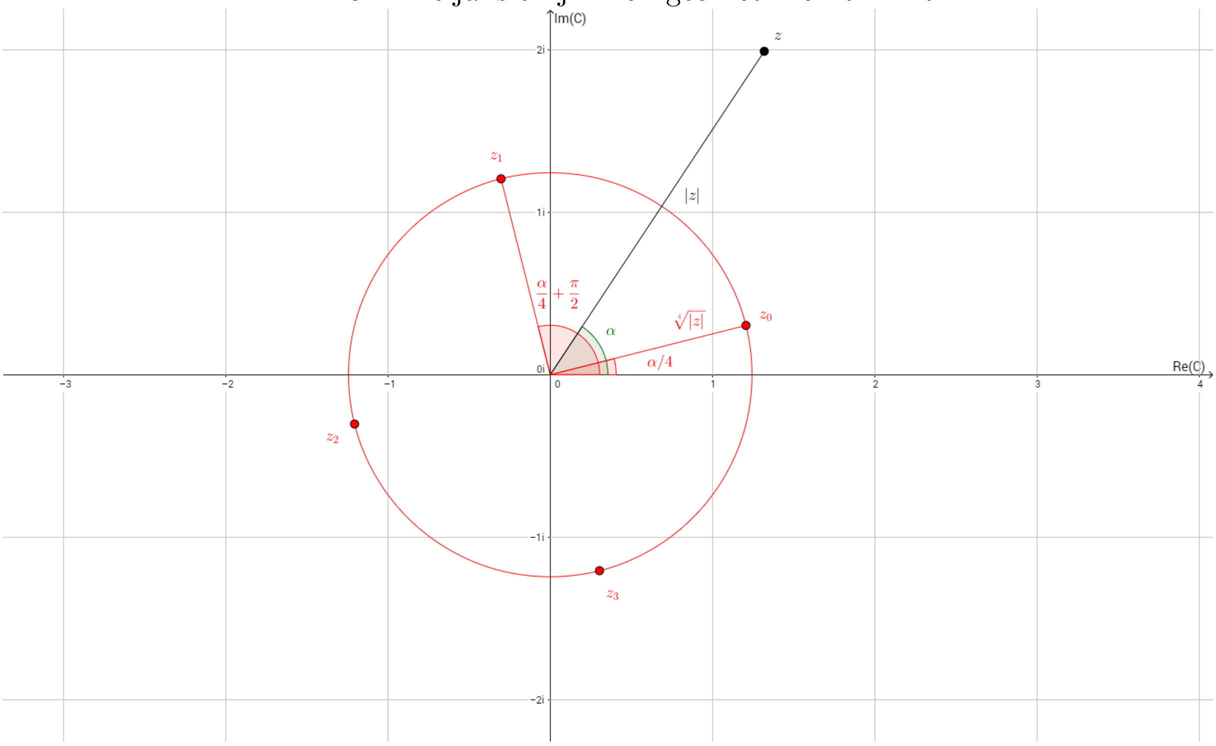
Huomautus 9.4. Lukuja ε_n^k kutsutaan *ykkösenjuuriksi*, sillä

$$
\begin{aligned}
\left(\varepsilon_n^k\right)^n &= \left(\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right)^k\right)^n \\
&= \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot k}\right)^n, && \text{kts. lause 8.15} \\
&= e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot k \cdot n} \\
&= e^{i2\pi k} \\
&= 1^k = 1
\end{aligned}
$$

kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$.

9.2.1 Esimerkkejä

Kuva 9.1: Neljänsien juurien geometrinen tulkinta



Esimerkki 25. Ratkaise yhtälö $z^4 = -16$.

Ratkaisu. *Huomataan* $-16 = 16e^{i\pi}$ *ja* $\varepsilon_4 = e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, *jolloin juuret ovat*

$$\begin{cases} z_0 &= \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(1+i)\,, \\ z_1 &= z_0 \cdot \varepsilon_4 = \sqrt{2}\,(1+i) \cdot i = \sqrt{2}\,(-1+i)\,, \\ z_2 &= z_0 \cdot \varepsilon_4^2 = \sqrt{2}\,(1+i) \cdot (-1) = \sqrt{2}\,(-1-i) \;\; ja \\ z_3 &= z_0 \cdot \varepsilon_4^3 \sqrt{2}\,(1+i) \cdot (-i) = \sqrt{2}\,(1-i)\,. \end{cases}$$

Esimerkki 26. Ratkaise yhtälön $z^3 = 1$ juuret.

Ratkaisu. *Nyt* $1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ *ja* $\varepsilon_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, *jolloin ratkaisut ovat*

$$\begin{cases} z_0 &= \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{0}{3}} = 1, \\ z_1 &= z_0 \cdot \varepsilon_3 = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right) \;\; ja \\ z_2 &= z_0 \cdot \varepsilon_3^2 = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

9.3 Tehtäviä

Tehtävä 43. Ratkaise yhtälön $z^3 = 27$ juuret, kun $z \in \mathbb{C}$.

Tehtävä 44. Ratkaise yhtälön $z^4 = 9e^{i\frac{5\pi}{4}}$ juuret.

Tehtävä 45. Ratkaise yhtälön $z^4 = \frac{9}{\sqrt{2}}\,(-1+i)$ juuret.

Tehtävä 46. Osoita, että binomiyhtälön $z^n = 1$ juuret ovat $1, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, ..., \varepsilon_n^{n-1}$, missä $\varepsilon_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Tehtävä 47. Käyttäen lausetta 9.2 tutki ovatko binomiyhtälön $z^4 = w^2$ ratkaisut samat, kuin yhtälön $z^2 = w$.

Luku 10

Kompleksifunktiot

Tässä kappaleessa oletetaan aina, että joukot X ja Y ovat reaali- tai kompleksilukujen joukot; siis $X, Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

10.1 Reaalilukujen aksioomista

Yksi olennaisimmista reaalilukujen ominaisuuksista on "supremumin" ja "infimumin" olemassaolo, mitä ei löydy muun muassa rationaalilukujen joukolta $\mathbb{Q}$. Itseasiassa muutoin $\mathbb{Q}$ toteuttaakin kaikki muut reaalilukujen aksioomat, mutta ei niin sanottua "täydellisyysaksioomaa".

Määritelmä 10.1 (Ylä- ja alaraja, supremum ja infimum)**.** Olkoon $m, M \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$.

1. Jos $x \leq M$ kaikilla $x \in A$, niin M on joukon A *yläraja*. Tällöin A on ylhäältä rajoitettu.
2. Jos $m \leq x$ kaikilla $x \in A$, niin m on joukon A *alaraja*. Tällöin A on alhaalta rajoitettu.
3. Joukko A on *rajoitettu*, jos se on rajoitettu sekä alhaalta että ylhäältä.
4. Jos A ei ole rajoitettu, niin se on *rajoittamaton*.
5. Joukon A *supremum*, $\sup A$, on joukon A pienin yläraja.
6. Joukon A *infimum*, $\inf A$, on joukon A suurin alaraja.

Aksiooma 10.2 (Täydellisyysaksiooma)**.** Jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on olemassa pienin yläraja, supremum. Samoin jokaisella alhaalta rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on olemassa suurin alaraja, infimum.

Määritelmä 10.3 (Avoin ja suljettu väli)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ rajoitettu väli, $m = \inf A$ ja $M = \sup A$.

1. Väli A on *suljettu*, jos ja vain jos $m, M \in A$. Tällöin merkitään $A = [m, M]$.
2. Vastaavasti väli A on *avoin*, jos ja vain jos $m, M \notin A$. Tällöin merkitään $A =]m, M[$.
3. Muutoin väli on *puoliavoin*.

Kuva 10.1: Luku M on välin $[a, b]$ eräs yläraja. Luku m on vastaavasti eräs alaraja. Kuvan tilanteessa $\inf [a, b] = a$ ja $\sup [a, b] = b$

10.1.1 Esimerkkejä

Esimerkki 27. Olkoon $A = \left\{ \left|\frac{1}{x}\right| : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} =]0, \infty[$. Tällöin joukon A alarajoja ovat kaikki epäpositiiviset reaaliluvut, mutta sen infimum – suurin alaraja – on $\inf A = 0$. Nyt A:lla ei ole ylärajaa, eikä siis supremumia, joten se on rajoittamaton.

Esimerkki 28. Olkoon $B =]0, \pi[\cap \mathbb{Q}$. Nyt joukolla B ei rationaalilukujen joukossa ole pienintä ylärajaa, sillä $\pi \notin \mathbb{Q}$. Reaalilukujen joukossa $\sup B = \pi$.

10.2 Kuvaus

“Kuvaus” on synonyymi sanalle funktio. Sitä suosituaan erityisesti puhuttaessa funktioista reaali- ja kompleksilukujoukkojen ulkopuolisten avaruuksien välillä (esimerkiksi matriisi- tai funktioavaruudet).

Määritelmä 10.4 (Kuva)**.** Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus – missä $X, Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ – ja $D \subset X$ lähtöjoukon osajoukko. Tällöin osajoukon D kuva on joukko $fD = \{f(x) \in Y : x \in D\}$.

Kuvajoukko käsittää siis kaikki ne alkiot, joille D kuvautuu kuvauksessa f.

Huomautus 10.5. Koko joukon X kuva fX ei välttämättä ole koko maalijoukko Y. Esimerkiksi funktiossa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$ kuvajoukko on $f\mathbb{R} = [0, \infty[$.

Määritelmä 10.6 (Alkukuva)**.** Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus – missä $X, Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ – ja $E \subset Y$ maalijoukon osajoukko. Tällöin osajoukon E alkukuva on joukko $f^{-1}E = \{x \in X : f(x) \in E\}$.

Alkukuva on siis kaikken niiden lähtöjoukon alkioiden joukko, jotka kuvautuvat maalijoukon osajoukolle E.

Huomautus 10.7. Koko maalijoukon alkukuva on aina lähtöjoukko itse. Toisin sanoen, jos $f : X \to Y$ on funktio, niin $f^{-1}Y = X$ kaikissa tapauksissa.

10.3 Jatkuva kuvaus

Seuraavat muutama lausetta nojaavat vahvasti funktion jatkuvuuteen. Jatkuvuus on tähän asti määritelty - melko intuitiivisesti - kuvaajana, “jonka voi piirtää nostamatta kynää”. Tämä ei ole kuitenkaan koko totuus, sillä on olemassa paljon (itseasiassa äärettömän monta) jatkuvia funktiota, joiden kuvaajia ei voi kynällä piirtää.

Tästä tietysti erityistapauksena ovat kompleksiset funktiot, joiden kuvaajat ovat mahdotonta piirtää kaksiulotteiselle tasolle, nimittäin kompleksifunktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kuvaaja on aina neliulotteinen.

Määritelmä 10.8 (Jatkuvuus)**.** Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, $a, x \in X$ ja $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$. Kuvaus f on *jatkuva pisteessä* a, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, että $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ aina, kun $|x - a| < \delta$.

Kuvaus f on jatkuva, jos se on jatkuva kaikissa pisteissä $a \in X$.

Määritelmän nojalla siis jatkuvan funktion arvot eivät voi karata mielivaltaisesti, vaan niiden on oltava mielivaltaisen lähellä, kun lähtöjoukon alkiot ovat riittävän lähellä.

Lemma 10.9. *Olkoon $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomi, eli*

$$p(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + ... + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

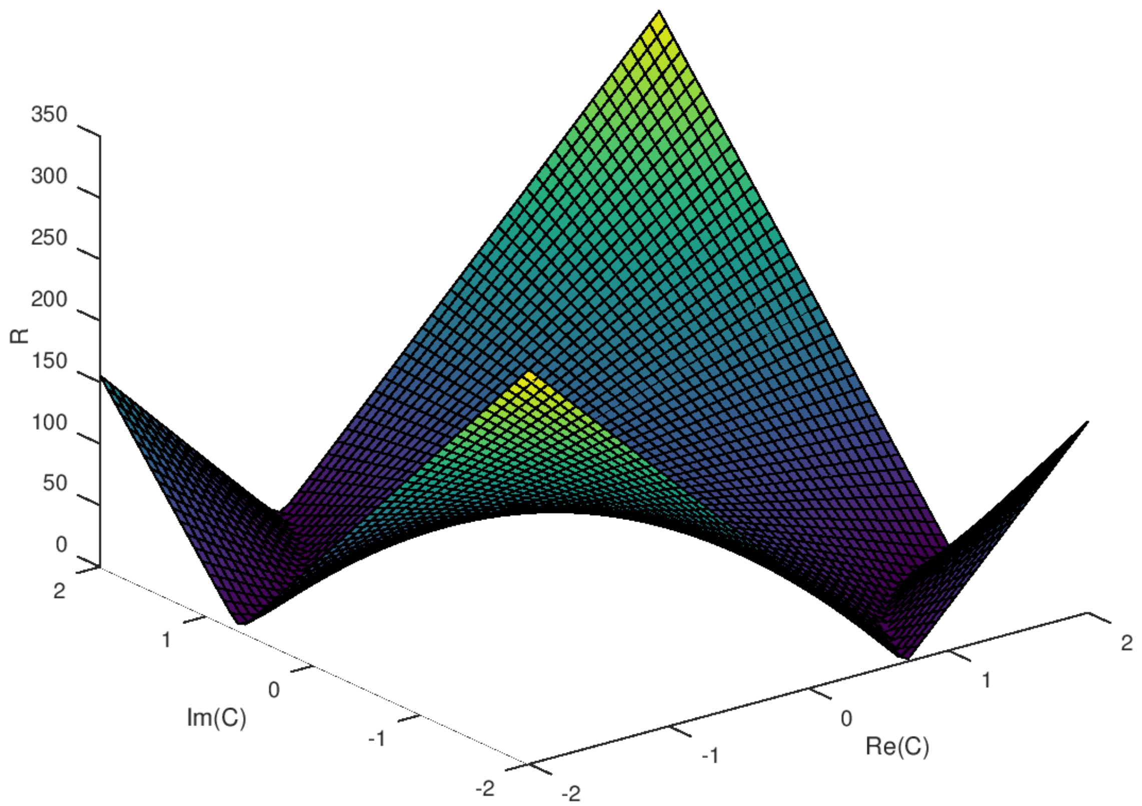
joillain $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, ..., n$, ja siis jatkuva. Tällöin polynomin itseisarvo $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$: $g(z) = |p(z)|$ on jatkuva.

Todistus. *Olkoon $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomi, ja siis jatkuva (tämä voidaan johtaa lauseista 5.2 ja 5.3 Väisälän kirjassa "Topologia 1"[6]).*

Merkitään $f = |\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, jolloin $f(z) = |z|$, ja siis myös jatkuva (Väisälä 4.6).

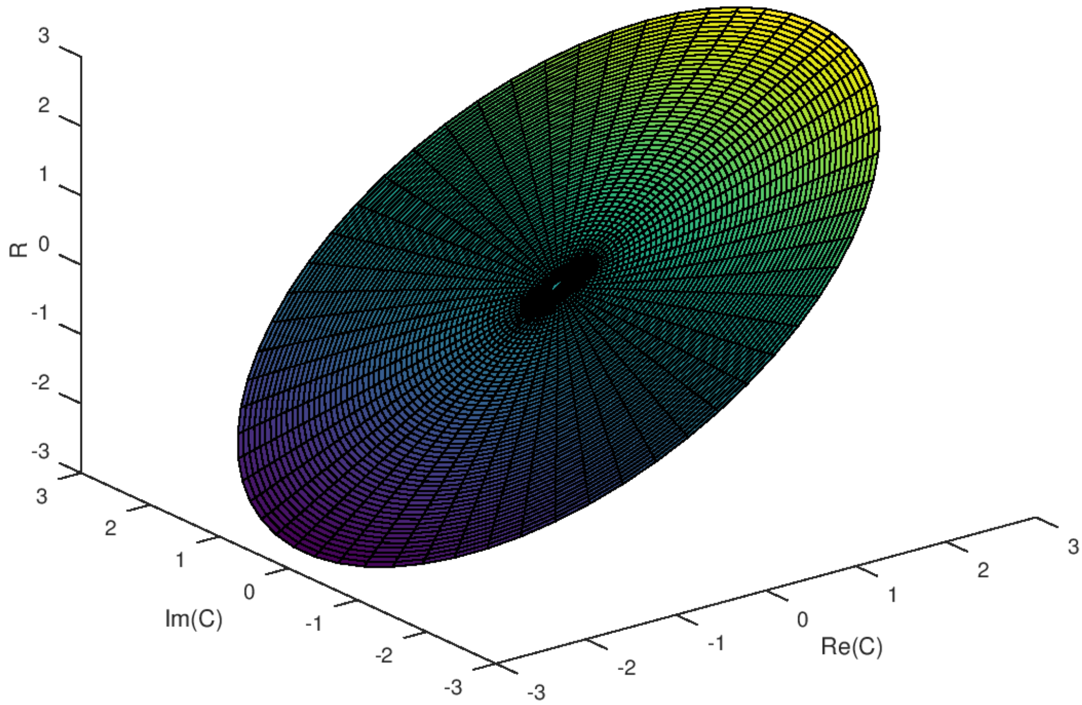
Nyt $g(z) = |p(z)| = f(p(z))$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joten $g = f \circ p$ on jatkuvista funktioista yhdistetty funktio, jolloin sekin on jatkuva (Väisälä 4.12). □

Kuva 10.2: Polynomin $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^2 + (1 + i)\, z - 2 + 2i$ itseisarvon kuvaaja

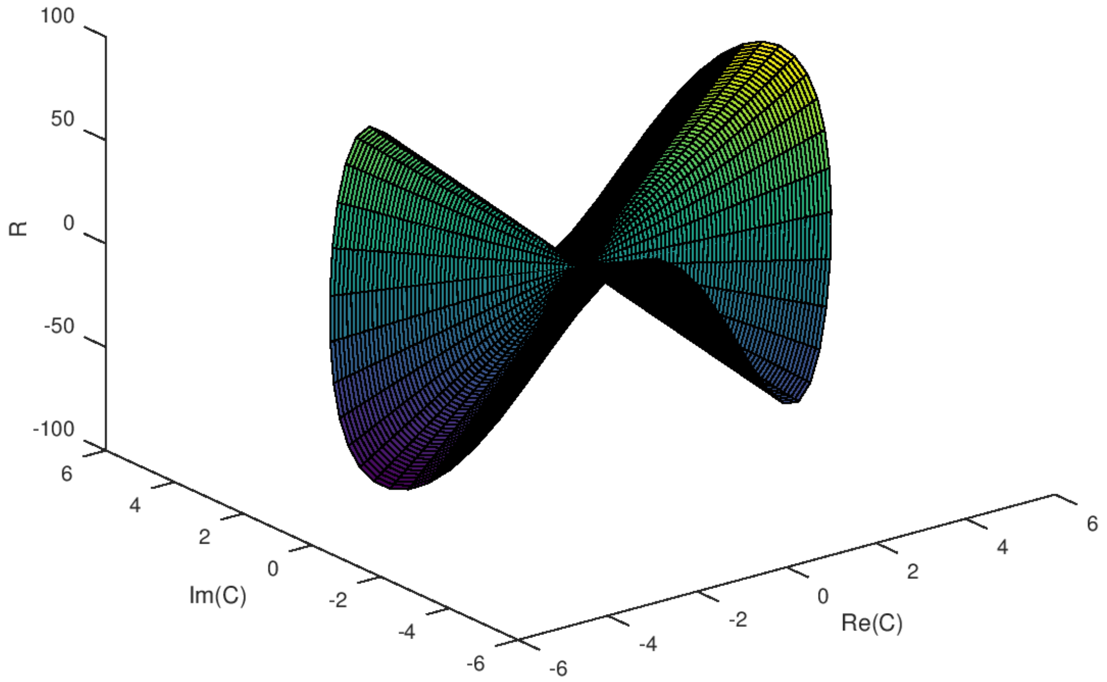


Lause 10.10. *Olkoon $R > 0$ jokin vakio, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ kompleksitason suljettu kiekko ja $f : D \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus kiekolta reaaliluvuille. Tällöin funktiolla f on suurin ja pienin arvo joukossa D, eli on olemassa jotkin $z_0, z_0' \in D$ siten, että $f(z_0) \leq f(z) \leq f(z_0')$ kaikilla $z \in D$.*

Kuva 10.3: Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ kuvaaja



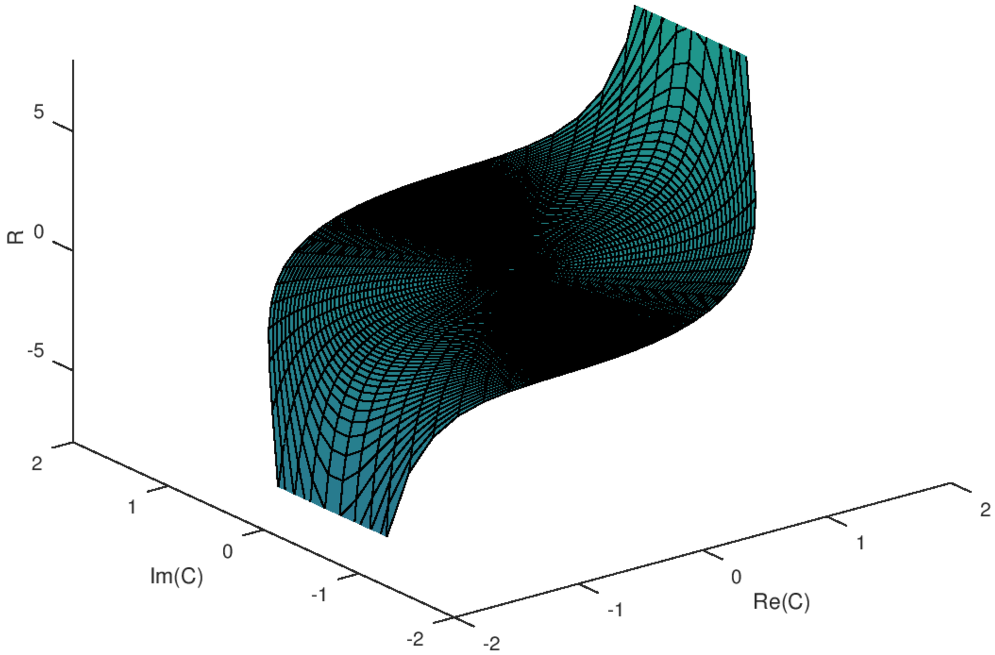
Kuva 10.4: Funktion $g : \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \pi\} \to \mathbb{R}$, $g(z) = \mathrm{Im}(z) \cdot \sin(\mathrm{Re}(z))$ kuvaaja



Todistus. *Eräs todistus tälle löytyy Väisälän kirjan "Topologia 1"[6] lauseesta 13.21.* $\square$

Huomautus 10.11. Jos D olisi avoin kiekko, niin voisi olla olemassa jokin piste z_0 kiekon reunalla, millä $f(z_0) \to \infty$. Avoin kiekko tosin ei sisällä reunaansa, joten $z_0 \notin D$.

Kuva 10.5: Funktion $f : \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \tan(\mathrm{Re}(z))$ kuvaaja.



Huomautus 10.12. Huomaa, että $f(z)$ kasvaa/vähenee rajatta, kun z lähestyy kiekon reunaa ja $\mathrm{Im}(z) = 0$

10.4 Algebran peruslause

Mahtipontisesti nimetty "algebran peruslause" (engl. "Fundamental theorem of Algebra") sanoo, että kaikilla polynomeilla $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on vähintään yksi nollakohta. Tämä on tietysti yhtäpitävä väite sen kanssa, että polynomin itseisarvolla $|p(z)|$ on minimikohta z_0, jossa $|p(z_0)| = 0$, ja siis $p(z_0) = 0$. Seuraavien aputulosten avulla näytämme, että näin todella on.

Lemma 10.13. *Olkoon $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomi. Jos $|z| \to \infty$, niin myös $|p(z)| \to \infty$.*

Todistus. *Kirjoitetaan polynomin itseisarvo muodossa*

$$
\begin{aligned}
|p(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \\
&= \left| a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \\
&= |a_n| \cdot |z|^n \cdot \left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n} \right|.
\end{aligned}
$$

Nyt, jos $|z| \to \infty$*, niin* $|z|^n \to \infty$ *ja* $z^{k-n} = \frac{z^k}{z^n} \to 0$ *kaikilla* $k = 0, 1, ..., n-1$*. Tällöin siis tulon jälkimmäinen tekijä suppenee*

$$
\left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n} \right| \to 1.
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| &= |a_n| \cdot \lim_{|z| \to \infty} |z^n| \cdot \lim_{|z| \to \infty} \left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n} \right| \\
&= |a_n| \cdot \infty \cdot 1 \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 10.14. *Olkoon* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *polynomi. Tällöin polynomin itseisarvo* $z \mapsto |p(z)|$ *saa pienimmän arvonsa.*

Todistus. *Lemman 10.13 perusteella* $|p(z)|$ *kasvaa rajatta, kun* $|z|$ *kasvaa rajatta. Tällöin erityisesti on olemassa jokin vakio* $R \in \mathbb{R}$*, että* $|p(z)| > |p(0)|$*, kun* $|z| > R$*, sillä muutoinhan* $|p(z)|$ *olisi ylhäältä rajoitettu.*

Olkoon $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ *kompleksitason suljettu kiekko yllä määritellyllä vakiolla* $R \in \mathbb{R}$*. Nyt lauseiden 10.9 ja 10.10 mukaan* $|p(z)|$ *saa pienimmän arvonsa joukossa* D*, eli on olemassa jokin* z_0*, jolla* $|p(z_0)| \leq |p(z)|$*, kun* $|z| \leq R$*. Tällöin siis myös pätee* $|p(z_0)| \leq |p(0)|$*.*

Toisaalta vakio R *valittiin niin, että* $|p(z)| > |p(0)|$ *aina, kun* $|z| > R$*. Tästä ja edellisestä huomiosta seuraa, että* $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ *kaikilla* $z \in \mathbb{C}$*.* □

Lause 10.15. *Olkoon* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *polynomi ja* z_0 *funktion* $z \mapsto |p(z)|$ *minimikohta. Tällöin* $p(z_0) = 0$*.*

Todistus. *Olkoon* $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $q(z) = p(z+z_0)$. *Nyt apufunktio* $z \mapsto |q(z)|$ *saa pienimmän arvonsa pisteessä* $z = 0$. *Väite on nyt yhtäpitävä sen kanssa, että* $q(0) = 0$.

Nyt q *on jokin polynomi, joten se voidaan kirjoittaa auki muodossa*

$$q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k.$$

Toisaalta myös pätee

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z+z_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(z+z_0\right)^k \\ &= a_n \left(z+z_0\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(z+z_0\right)^k. \end{aligned}$$

Puretaan suurimman asteen termi $a_n \left(z+z_0\right)^n$ *Newtonin binomikaavalla:*

$$\begin{aligned} a_n \left(z+z_0\right)^n &= a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z_0^k \\ &= a_n \left(\binom{n}{0} z^{n-0} z_0^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z_0^k \right) \\ &= a_n \left(1 \cdot z^n \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z_0^k \right) \\ &= a_n z^n + a_n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z_0^k. \end{aligned}$$

Tästä huomataan, että polynomien q *ja* p *johtokertoimet ovat samat eli* $a_n = b_n \neq 0$. *Tällöin siis polynomin* q *kertoimista* $b_1, ..., b_n$ *ainakin yksi on nollasta poikkeava. Merkitään ensimmäisen nollasta poikkeavan termin indeksiä* r*:llä. Nyt voimme kirjoittaa apupolynomin* q *auki muodossa*

$$q(z) = b_0 + \sum_{k=r}^{n} b_k z^k,$$

missä $r \in \{1, ..., n\}$ *ja* $b_r \neq 0$.

Nyt koska

$$q(0) = b_0 + \sum_{k=r}^{n} b_k 0^k = b_0,$$

niin alkuperäinen väite on yhtäpitävä sen kanssa, että $b_0 = 0$.

Tehdään vastaoletus: $b_0 \neq 0$. *Määritellään apupolynomi*

$$\begin{aligned} \bar{q}(z) &= q(z) - \sum_{k=r+1}^{n} b_k z^k \\ &= b_0 + b_r z^r \end{aligned}$$

katkaisemalla polynomi q *ensimmäisen nollasta poikkeavan kertoimen indeksistä* r. *Tarkastelemalla apupolynomin nollakohtaa* $\bar{q}(z) = 0$ *saamme binomiyhtälön*

$$b_0 + b_r z^r = 0 \iff z^r = -\frac{b_0}{b_r}.$$

Olkoot (t, φ) *pisteen* $-\frac{b_0}{b_r}$ *napakoordinaatit. Tällöin binomiyhtälön ratkaisut ovat*

$$z_1,\ z_1 \cdot \varepsilon_r^1,\ z_1 \cdot \varepsilon_r^2,\ ...,\ z_1 \cdot \varepsilon_r^{r-1}$$

missä $z_1 = \sqrt[r]{t} e^{i\frac{\varphi}{r}}$.

Tarkastellaan seuraavaksi koko apupolynomia q *lähellä pistettä* z_1. *Olkoon* $s \in \,]0,1[$ *pieni positiivinen reaaliluku. Nyt*

$$\begin{aligned} |q(sz_1)| &= \left| 1 \cdot b_0 + \sum_{k=r}^{n} b_k (sz_1)^k \right| && \mid 1 = (1 - s^r) + s^r \\ &= \left| (1 - s^r) \cdot b_0 + s^r \cdot b_0 + b_r s^r z_1^r + \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^k z_1^k \right| && \mid \textit{yhteiset tekijät } s^r \\ &= \left| (1 - s^r) \cdot b_0 + s^r \cdot (b_0 + b_r z_1^r) + s^r \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^{k-r} z_1^k \right| && \mid \textit{kolmioepäyhtälö} \\ &\leq |(1 - s^r) \cdot b_0| + |s^r \cdot (b_0 + b_r z_1^r)| + |s^r| \sum_{k=r+1}^{n} \left| b_k s^{k-r} z_1^k \right| && \mid b_0 + b_r z_1^r = 0 \\ &= (1 - s^r) |b_0| + 0 + s^r \sum_{k=r+1}^{n} |b_k| \, s^{k-r} \, |z_1|^k . \end{aligned}$$

Nyt jos $s \to 0$, *niin myös* $s^{k-r} \to 0$ *kaikilla* $k \in \{r+1, r+2, ..., n\}$. *Tällöin siis pätee*

$$\lim_{s \to 0} \sum_{k=r+1}^{n} |b_k| \, s^{k-r} \, |z_1|^k = 0,$$

sillä kertoimet $|b_k|$ *ja* $|z_1|^k$ *ovat vakioita kaikilla* $r < k \leq n$.

Nyt voimme valita jonkin vakion $s_0 \in \,]0,1[$ *niin, että loppusumman arvo kohdassa* $s = s_0$ *on korkeintaan* $\frac{1}{2}|b_0|$, *eli*

$$\sum_{k=r+1}^{n} |b_k| \, s_0^{k-r} \, |z_1|^k < \frac{1}{2} |b_0| \, .$$

Tällöin siis

$$\begin{aligned}
|q(s_0 z_1)| &\leq (1 - s_0^r) \, |b_0| + s_0^r \sum_{k=r+1}^{n} |b_k| \, s_0^{k-r} \, |z_1|^k \\
&\leq (1 - s_0^r) \, |b_0| + s_0^r \cdot \frac{1}{2} |b_0| \\
&= \left(1 - s_0^r + \frac{1}{2} s_0^r\right) \cdot |b_0| \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} s_0^r\right) \cdot |b_0| \\
&< |b_0| = |q(0)| \, .
\end{aligned}$$

Saimme siis, että

$$|q(s_0 z_1)| < |q(0)| \, ,$$

mikä on ristiriidassa sen kanssa, että 0 *on polynomin* $z \mapsto |q(z)|$ *minimikohta. Nyt vastaoletuksen täytyy olla väärä ja siis alkuperäisen väitteen oltava tosi, eli* $|q(0)| = 0$, *mistä seuraa*

$$|p(z_0)| = 0.$$

□

Lause 10.16 (Algebran peruslause)**.** *Olkoon* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n*-asteinen polynomi, missä* $n \geq 1$. *Tällöin p:llä on vähintään yksi nollakohta kompleksilukujen joukossa.*

Todistus. *Olkoon* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n*-asteinen polynomi.*

Lemman 10.14 mukaan kuvauksella $z \mapsto |p(z)|$ *on minimi jossain pisteessä* z_0 *ja lauseen 10.15 mukaan sen arvo tuossa kohdassa on* 0. *Tällöin lauseen 7.3 kohdan 1 perusteella tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että*

$$p(z_0) = 0.$$

□

Kirjallisuutta

[1] Ahlfors, Lars V. (1966). *Complex Analysis*. 2. painos. New York: McGraw-Hill Book Company.

[2] Hytönen, T. (2011). *Algebran peruslause lukiolaisille*. Teoksessa Matematiikkalehti Solmu 3/2011. Helsinki: Solmu.

[3] Kankaanpää, J. (2001). *Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2*. Helsinki: Helsingin Yliopisto.

[4] Lehtinen, M. (2006). *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*. Teoksessa Matematiikkalehti Solmu 1/2006. Helsinki: Solmu.

[5] Nahin, P. J. (1998). *An imaginary tale: The story of [the square root of minus one]*. Princeton : Chichester: Princeton University Press.

[6] Väisälä, J. (2007). *Topologia: 1* (4. korj. p.). [Helsinki]: [Limes].